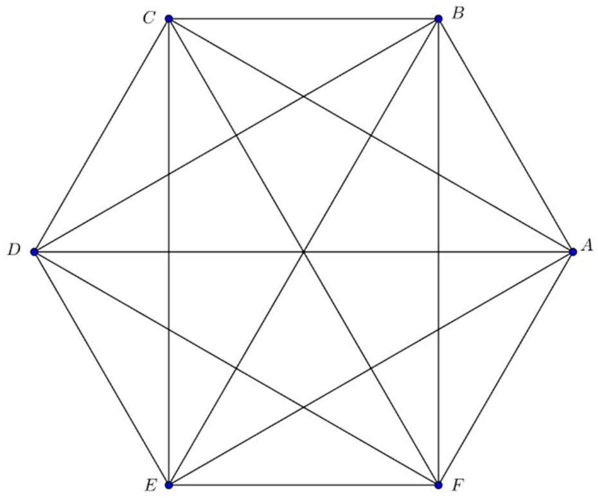
07 Textaufgaben

Aufgaben:
a)
Wie oft erklingen die Gläser, wenn sich
n Personen begrüssen?



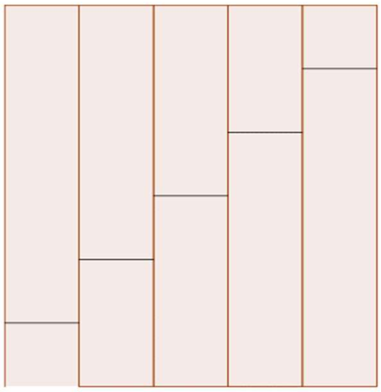
Wir bezeichnen die gesuchte Anzahl mit g_n .

Illustration für n = 6

1. Weg:
Die erste Person stösst mit allen übrigen an:
$n-1$ Gläserklänge
Die zweite Person stösst mit allen übrigen
mit Ausnahme der 1. Person an:
$n-2$ Gläserklänge
...
...
Die zweitletzte Person stösst noch mit der
letzten Person an:
1 Gläserklang
also insgesamt:

$g_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots.. + 3 + 2 + 1$ Gläserklänge.

2. Weg:
Jede der n Personen stösst mit jeder der übrigen $n-1$
Personen an.
Dabei wird jeder Gläserklang doppelt gezählt
(A mit B und B mit A) damit gilt:



$$g_n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

Kombiniert man die beiden Resultate so ergibt sich:
$g_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots.. + 3 + 2 + 1 = \frac{1}{2}n(n-1)$

Zusatzfrage:
Wie viele Personen sind in einem Raum anwesend, wenn beim Anstossen 253-mal die
Gläser klingen?
$\frac{1}{2}n(n-1) = 253$ oder $n^2 - n - 506 = 0$ mit der positiven Lösung $n = 23$

Folgerung:
Da g_{n+1} gerade mit der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis n übereinstimmt gilt:
$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots. + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$
Beispiel:
Die Summe der 100 ersten natürlichen Zahlen ist $\frac{1}{2}100 \cdot 101 = 5050$ (Anekdote von Gauss).

b)
Ein Schiff fährt in 4 Stunden und 12 Minuten auf einem Fluss 12 km stromabwärts und wieder zurück. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit des Wassers beträgt 3 km/h. Mit welcher Eigengeschwindigkeit fährt das Schiff?

Strömungsgeschwindigkeit des Wassers: $v_W = 3$ km/h
Eigengeschwindigkeit des Schiffs: v_E km/h

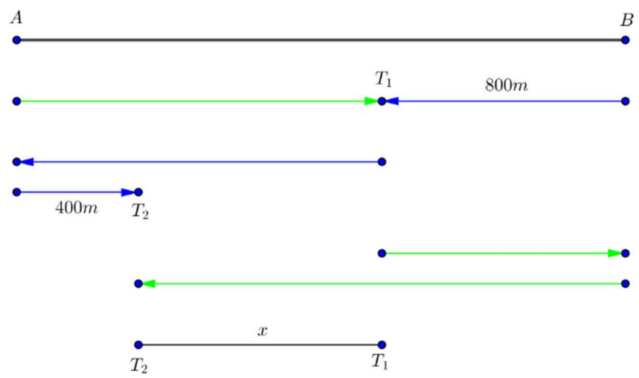
Geschwindigkeit abwärts: $v_E + v_W$
Geschwindigkeit aufwärts: $v_E - v_W$

Bei der gleichförmigen Bewegung gilt:
$s = v \cdot t$ oder $t = \frac{s}{v}$
also für die Gesamtzeit in Stunden

$$\frac{12}{v_E + 3} + \frac{12}{v_E - 3} = \frac{21}{5}$$

Division durch 3 und Multiplikation mit dem Hauptnenner führt auf die Gleichung
$7v_E^2 - 40v_E - 63 = 0$
mit der positiven Lösung für die Eigengeschwindigkeit $v_E = 7$ km/h.
Die zweite Lösung ist negativ.

c) *
Zwei Athleten Alex und Bruno laufen gleichzeitig mit konstanter Geschwindigkeit von den beiden Endpunkten einer geraden langen Allee einander entgegen, der schnellere Alex von A aus und Bruno von B weg.
Sie treffen sich erstmals beim Treffpunkt T_1 in 800 m Entfernung vom nähern Startpunkt B. Nach Erreichen des anderen Endes der Allee laufen sie zurück und begegnen sich nun beim Treffpunkt T_2, der 400 m vom andern Startpunkt A entfernt ist. Wie lang ist die Allee?



Die Geschwindigkeit des schnelleren Läufers sei v_A, die des langsameren entsprechend v_B.
Es bezeichne $\overline{T_1T_2}$ die Distanz der beiden Treffpunkte.
Da die Laufzeiten die beiden Läufer gleich sind gilt:

$$\frac{800}{v_B} = \frac{400+x}{v_A} \qquad (1)$$

$$\frac{400 + x + 400}{v_B} = \frac{800 + 800 + x}{v_A}$$

Zwar ist es nicht möglich die drei Variablen mit zwei Gleichungen zu bestimmen, da durch die Angaben nur das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten bestimmt ist (würden die beiden Läufer ihre Geschwindigkeit z.B. verdoppeln, so würden sich die Treffpunkte nicht verändern. Dies hängt damit zusammen, dass bei der Division der zweiten durch die erste Gleichung die Geschwindigkeiten wegfallen:

$$\frac{800 + x}{800} = \frac{1600 + x}{400 + x}$$

Vereinfachen führt auf die quadratische Gleichung

$x^2 + 1200x + 320000 = 800x + 1280000$ oder
$x^2 + 400x - 960\,000 = 0$
mit der einzigen positiven Lösung $x_1 = 800$ ($x_2 = -1200$).
Die Allee ist also 400 + 800 + 800 = 2000 Meter lang.
Setzt man x z.B. in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich für das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{400 + x}{800} = \frac{400 + 800}{800} = \frac{3}{2}$$

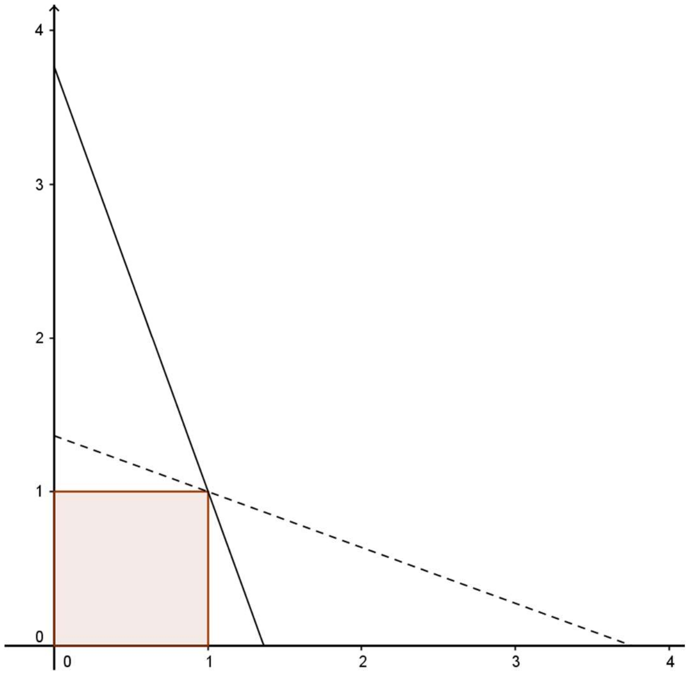
Die Aufgabe kann allerdings auch ohne Gleichung elegant gelöst werden. Die Figur zeigt, dass die beiden Läufer beim Erreichen von T_2 zusammen genau drei Längen der Allee zurückgelegt haben. Dies gilt aber auch für die Einzelstrecken. Da Bruno beim ersten Treffen 800 Meter zurückgelegt hat, hat er bis zum zweiten Treffen die dreifache Strecke $3 \cdot 800 = 2400$ Meter zurückgelegt. Da 400 Meter den Rückweg von A nach T_2 betreffen hat die Allee die Länge 2400 – 400 = 2000 Meter.

Ein mögliches Vorgehen bei Textaufgaben:

1. Text genau lesen
2. Bei einem Beispiel mit vorgegebenen Zahlen Zusammenhänge herauszufinden versuchen. Die vorgegebenen Zahlen durch Variable ersetzen
3. Gleichungssystem lösen
5. Welche Lösungen sind sinnvoll?
6. Lösung als Text formulieren

Hinweis: Leitprogramm der ETH Quadratische Gleichungen:
http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/aa/quadr_gleich/quadgl.pdf

Eine komplexere Aufgabe



An einer Wand steht eine würfelförmige Kiste von einem Meter Kantenlänge. An diese Wand wird eine Leiter mit einer Länge von 4 m angelehnt. Welche maximale Höhe kann das obere Ende der Leiter erreichen?
Bezeichnen wir die Achsenabschnitte mit x bzw. y dann gilt nach Pythagoras

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 16} \qquad 1)$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke folgt:

$$\frac{y-1}{1} = \frac{1}{x-1}$$

oder umgeformt

$$\boldsymbol{xy = x + y} \qquad 2)$$

Wegen 2) kann 1) folgendermassen umgeformt werden.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= (x+y)^2 - 2(x+y) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Die Substitution $\boldsymbol{u = x + y}$ führt auf die quadratische Gleichung

$$u^2 - 2u - 16 = 0$$

mit den Lösungen $u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17}$, wobei in diesem Fall nur die positive Lösung u_1 sinnvoll ist.
Aus 2) folgt $\boldsymbol{xy = u_1}$ oder

$$x = \frac{u_1}{y} = \frac{1+\sqrt{17}}{y}$$

Eingesetzt in 1) erhält man

$$\left(\frac{u_1}{y}\right)^2 + y^2 = \frac{{u_1}^2}{y^2} + y^2 = 16$$

Erneute Substitution mit $\boldsymbol{v = y^2}$ führt auf

$$\frac{{u_1}^2}{v} + v = 16$$

$$v^2 - 16v + 18 + 2 \cdot \sqrt{17} = 0$$

mit den Lösungen

$$v_{1,2} = 8 \pm \sqrt{46 - 2\sqrt{17}}$$

Macht man die Substitution $v = y^2$ rückgängig, so ergeben sich die beiden (positiven) Lösungen für y

$$y_{1,2} = \sqrt{8 \pm \sqrt{46 - 2\sqrt{17}}}$$

Die maximale Höhe beträgt damit $y = \sqrt{8 + \sqrt{46 - 2\sqrt{17}}} \approx 3.76$ Meter.
Mit
$$x = \frac{u_1}{y} = \frac{1 + \sqrt{17}}{y}$$
Erhält man den zugehörigen Wert für x zu
$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{y} = \frac{1 + \sqrt{17}}{\sqrt{8 + \sqrt{46 - 2\sqrt{17}}}} = \sqrt{8 - \sqrt{46 - 2\sqrt{17}}} \approx 1.36$$
Bei der in der Abbildung gestrichelt gezeichneten Lösung sind
x und y vertauscht und y minimal.

Bemerkung:
Ohne die Umformung führt die Aufgabe auf ein Gleichung 4. Grades
$$x^4 - 2 \cdot x^3 - 14 \cdot x^2 + 32\, x - 16 = 0$$
mit den Lösungen (Maple)
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2}\sqrt{14 - 2\sqrt{17}}\,,\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2}\sqrt{14 - 2\sqrt{17}}$$
$$x_1 \approx 1.3622 \qquad x_2 \approx 3.7610 \qquad (x_{3,4} < 1)$$

Näherungslösungen können auch mit einem numerischen Verfahren bestimmt werden
(→ Weitere Themen → Numerische Verfahren → Iteration)