

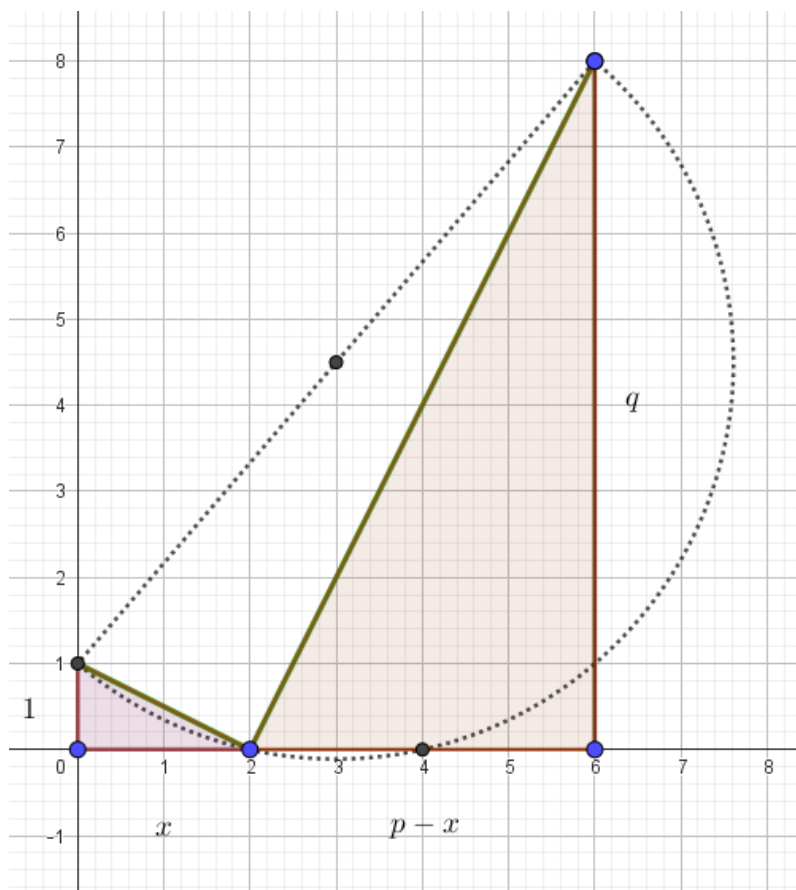
Die quadratische Auflösungsformel («Mitternachtsformel»)

Ein geometrischer Weg zur Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 - px + q = 0$

Quelle: G. Lob Bulletin 2025.1

Die quadratische Gleichung $ax^2 + b \cdot x + c = 0$ kann nach Division durch $a \neq 0$ auf die Form $x^2 - px + q = 0$ gebracht werden.

In der Abbildung ist $p = 6$ und $q = 8$.



Die Lösungen x und $p - x$ ergeben sich mit den beiden gefärbten ähnlichen Dreiecken.

Aus der Ähnlichkeit folgt die Gleichheit entsprechender Streckenverhältnisse:

$$\frac{x}{1} = \frac{q}{p - x}$$

vereinfacht

$$x \cdot (p - x) = q \quad \text{oder} \quad x^2 - px + q = 0$$

Die Lösungen (im Beispiel 4 und 2) ergeben sich, indem man den Thaleskreis mit dem Durchmesser $(0, 1)$ und (p, q) mit der x -Achse schneidet

Bringt man die quadratische Gleichung durch quadratische Ergänzung auf die folgende Form

$$x^2 - px + q = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q = \frac{1}{4} \cdot (p^2 - 4q)$$

dann ist zu erkennen, dass die Gleichung nur im Fall $p^2 - 4q \geq 0$ reelle Lösungen hat.

Im Grenzfall $p^2 - 4q = 0$ berührt der Kreis die x-Achse und es gibt eine (Doppel-)Lösung.

Damit können die Lösungen auch rechnerisch gefunden werden:

Wegen $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot (p^2 - 4q)$ hat die (reinquadratische) Gleichung für

$p^2 - 4q > 0$ zwei verschiedene reelle Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Im Fall $p^2 - 4q = 0$ die Lösung $x_{1,2} = \frac{p}{2}$

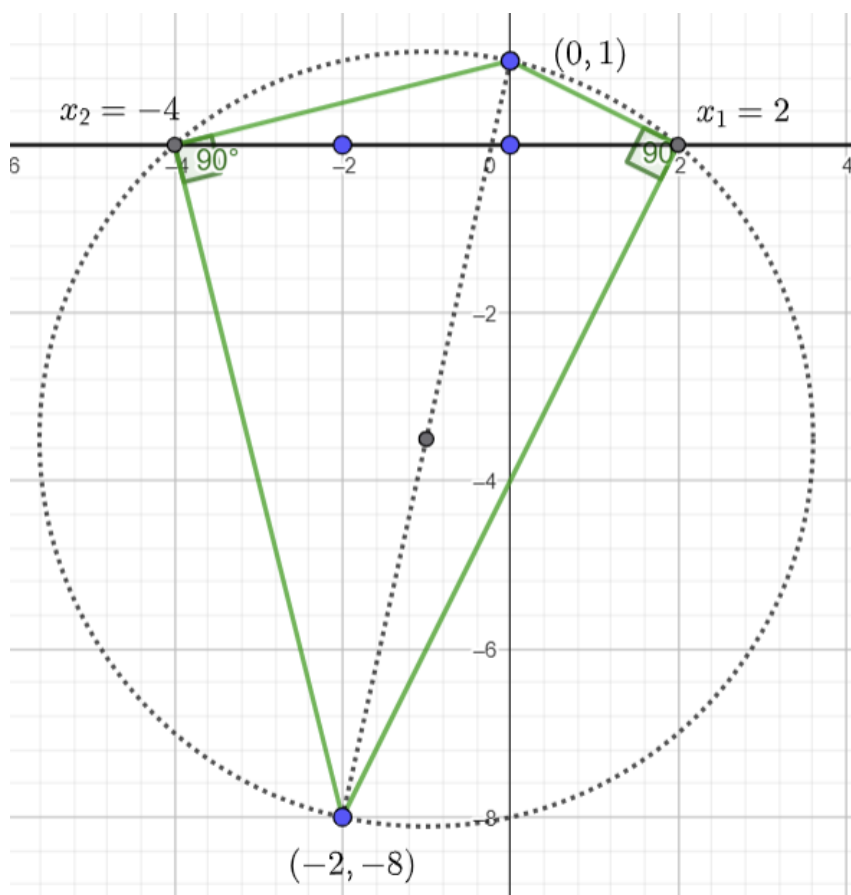
und im Fall $p^2 - 4q < 0$ keine reelle Lösung.

Im Beispiel erhält man für $p = 6$ und $q = 8$ die erwähnten Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{6 \mp \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} \quad x_1 = 2 \text{ und } x_2 = -4$$

Wie das folgende Beispiel zeigt, sind negative Werte von p oder q in entgegengesetzter Richtung abzutragen.

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$



Herleitung der «Mitternachtsformel»

Die Frage nach den Schnittpunkten der quadratischen Parabel mit der x-Achse führt im allgemeinen Fall mit der Scheitelpunktgleichung auf die quadratische Gleichung:

$$y = a \cdot (x - u)^2 + v = 0$$

oder nach Division durch a auf

$$(x - u)^2 = -\frac{v}{a}$$

Und wegen $u = -\frac{b}{2a}$ und $v = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ auf

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2}$$

Der Zähler des rechten Bruchs heisst Diskriminante D, denn er entscheidet über die Anzahl der Lösungen. Es können drei Fälle auftreten:

1. $D = b^2 - 4ac < 0$

Da das Quadrat einer reellen Zahl nicht negativ sein kann, hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung. Die zugehörige quadratische Parabel meidet die x-Achse.

2. $D = 0$

Die Gleichung hat in diesem Fall wegen $D = 0$ die Form

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

Die Gleichung hat genau eine Lösung $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$

Die zugehörige Parabel berührt die x-Achse.

3. Fall (Hauptfall)

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{D}{4a^2} = \left(\pm \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)^2$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Die quadratische Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Die zugehörige Parabel schneidet die x-Achse an zwei verschiedenen Stellen.

Satz:

Die quadratische Gleichung $ax^2 + b \cdot x + c = 0$ $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ mit der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ hat für

$D > 0$ zwei verschiedene reelle Lösungen $x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ und $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$D = 0$ genau eine reelle Lösung $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$ (sogenannte Doppellösung)

$D < 0$ keine reelle Lösung

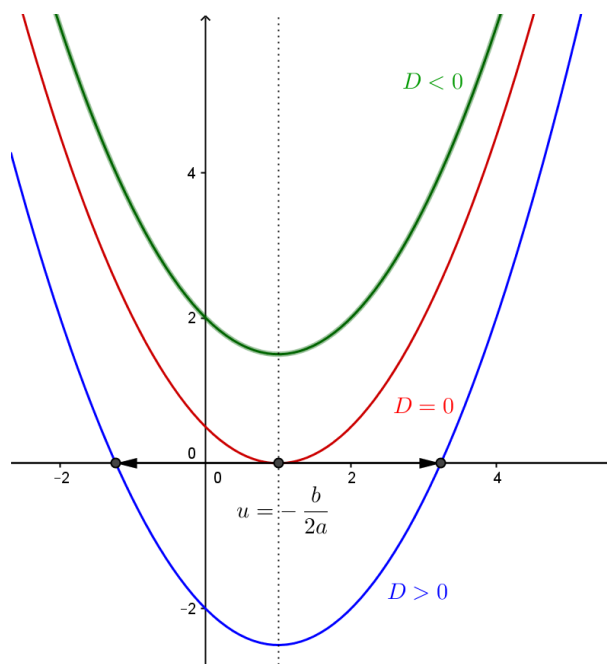
Bemerkung: Diskriminante kommt vom lateinischen *discriminare*: trennen.

Zusammenhang zwischen quadratischer Funktion und quadratischer Gleichung

In der Abbildung sind die Graphen der quadratischen Funktion $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x + c$ für die Parameterwerte

a) $c = 2$ b) $c = \frac{1}{2}$ c) $c = -2$ dargestellt.

Die Parabeln gehen durch Parallelverschiebung in y-Richtung auseinander hervor. Die Bestimmung der Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse führt auf die quadratische Gleichung $\frac{1}{2} \cdot x^2 - x + c = 0$ mit der Diskriminante $D = 1 - 2c$



a) $c = 2$ Diskriminante $D = -3 < 0$
Die Parabel meidet die x-Achse:
Die quadratische Funktion hat keine reellen Nullstellen, die quadratische Gleichung hat keine reellen Lösungen.

b) $c = \frac{1}{2}$ Diskriminante $D = 0$:
Die Parabel berührt die x-Achse. Die quadratische Funktion hat eine reelle Nullstelle. Die quadratische Gleichung hat genau eine Lösung.

c) $c = -2$ Diskriminante $D > 0$:
Die Parabel schneidet die x-Achse. zwei reelle Lösungen. Die quadratische Funktion hat zwei verschiedene reelle Nullstellen. Die quadratische Gleichung hat zwei verschiedene Lösungen.

Schreibt man die quadratische Auflösungsformel in der Form

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$$

so sieht man, dass sich die beiden Lösungen im Fall $D > 0$ ergeben, indem man von der x-Koordinate des Scheitels $u = \frac{-b}{2a}$ ausgehend $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ addiert bzw. subtrahiert.

Zusammenfassung:

Gegeben sind die quadratische Gleichung
(1) $ax^2 + bx + c = 0$ mit der Diskriminante D
und die zugehörige quadratische Funktion
(2) $f: x \rightarrow y = ax^2 + bx + c$

Es können drei Fälle auftreten:

- a) $D < 0$ Gleichung (1) hat keine reelle Lösung, die quadratische Parabel (2) meidet die x-Achse.
- b) $D = 0$ Gleichung (1) hat genau eine reelle Lösung, die quadratische Parabel (2) berührt die x-Achse
- c) $D > 0$ Gleichung (1) hat zwei verschiedene reelle Lösungen, die quadratische Parabel (2) schneidet die x-Achse