

13 Die Parabel als geometrischer Ort

Aufgabe:

Bestimme die Menge aller Punkte der Ebene, die von einem festen Punkt F und einer gegebenen Geraden l gleichen Abstand haben.

Bezeichnungen:

l heisst Leitgerade, F heisst Brennpunkt.
Der Abstand des Brennpunkts F von der Leitgeraden l heisst Parameter und wird mit p bezeichnet.

Skizze:

$$l: y = -1 \quad F(0, 1)$$

Konstruktion:

Schneide die Parallele zur Leitgeraden im Abstand r mit dem Kreis um F mit Radius r .

Herleitung der Parabelgleichung:

Ortsbedingung:

$$|\overrightarrow{PL}|^2 = |\overrightarrow{PF}|^2$$

Nach Pythagoras gilt:

$$\left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 + x^2 \text{ oder ausmultipliziert}$$

$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = y^2 - py + \frac{p^2}{4} + x^2 \text{ und vereinfacht}$$

$$2py = x^2 \text{ oder}$$

$$y = \frac{1}{2p} x^2$$

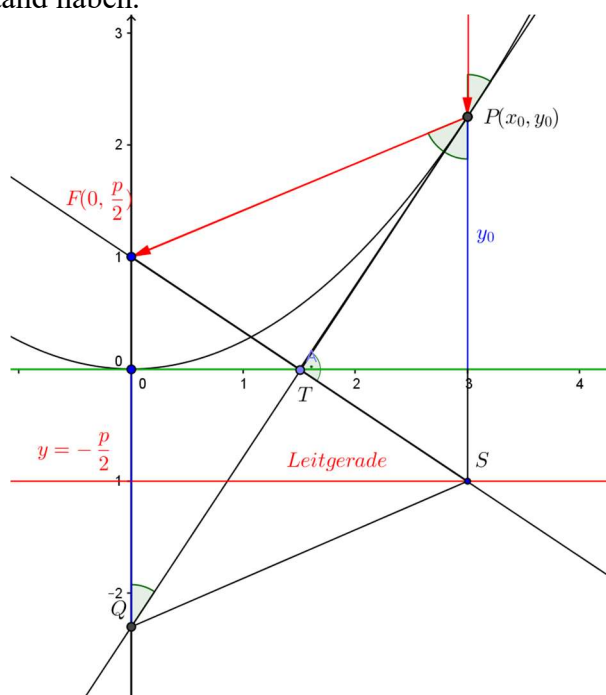
Das ist die Gleichung der Parabel

mit dem Brennpunkt $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ und der Leitgeraden $l: y = -\frac{p}{2}$

Damit ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem Parameter p und dem bisherigen a in der Parabelgleichung $y = ax^2$

$$a = \frac{1}{2p} \text{ oder } p = \frac{1}{2a}$$

Bei der Normalparabel $y = x^2$ hat der Brennpunkt wegen $a = 1$ die Koordinaten $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$



Für technische Anwendungen ist die folgende Parabeleigenschaft wichtig:
 Vom Brennpunkt ausgehende Strahlen werden an der Parabel so reflektiert, dass sie achsenparallel austreten (Abbildung links: Scheinwerfer). Umgekehrt werden achsenparallel eintreffende Strahlen an einem parabolförmigen Spiegel im Brennpunkt gebündelt (Abbildung rechts: Radioteleskop, „Satellitenschüssel“)



Übungsaufgaben:

a)

Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 1$

Gesucht sind ihr Brennpunkt und ihre Leitgerade.

Lösung: $F(1, -1), y = -2$

b)

Gesucht ist die Gleichung einer Parabel, wenn ihr Brennpunkt $F(2, 0)$ und ihre Leitgerade $l: y = 2$ gegeben ist.

Lösung $y = -\frac{1}{4}x^2 - x$

c)

Auf welcher Kurve liegen die Mittelpunkte $M(x, y)$ der Kreise, die durch den Punkt $C(2, 1)$ gehen und die x -Achse berühren?

Lösung: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{2}$

d)

Über der Grundseite $A(-c, 0)B(c, 0)$ werden Dreiecke betrachtet, deren Ecke C auf der Geraden $y = h$ mit $h > 0$ liegen. Auf welcher Kurve liegen die Höhenschnittpunkte dieser Dreiecke?

Lösung: $y = -\frac{1}{h}x^2 + \frac{c^2}{h}$