4. Wachstumsmodelle

Bei vielen in der Natur vorkommenden Wachstumsvorgängen ist die Zu- bzw. Abnahme in einer bestimmten Zeit abhängig vom aktuellen Bestand.

4.1 Exponentielles Wachstum

Beispiel:
Bei einer Bakterienkultur werden zu Beginn 100 Bakterien gezählt. Die Anzahl der Bakterien nehme (im Mittel) stündlich um 40% zu. Für die Bakterienzahl zur Zeit t gilt dann:

$$f(t) = 100 \cdot \left(1 + \frac{40}{100}\right)^t = 100 \cdot 1.4^t$$

Verallgemeinerung:

$f(t) = a \cdot b^t$ a > 0, b > 1	allg. **exponentielle Wachstumsfunktion**
$f(0) = a$ ist der Anfangswert, b heisst Wachstumsfaktor.	

Vergrössert man nämlich t um 1, so multipliziert sich der Funktionswert mit dem Faktor b, Insbesondere gilt:
Exponentielles Wachstum zeichnet sich durch eine konstante Verdopplungszeit aus.

Vergrössert man t um Δt, so wird der Funktionswert mit $b^{\Delta t}$ multipliziert.

Zum Vergleich:
$f(t) = a + b \cdot t$ **lineare Wachstumsfunktion**
$f(0) = a$ ist der Anfangswert.
Vergrössert man t um 1, so wird zum Funktionswert b **addiert**.

Oft stellt man den Wachstumsfaktor bei exponentiellem Wachstum in der Form $b = e^k$ dar. In diesem Fall gilt $k = \ln b$ und die exponentielle Wachstumsfunktion kann neu in der folgenden Form dargestellt werden:

exponentielle Wachstumsfunktion	$f(t) = a \cdot e^{kt}$ k > 0

Für die 1.Ableitung (momentane Wachstumsrate) gilt dann: $f'(t) = ka \cdot e^{kt} = k \cdot f(t)$
d.h. die exponentielle Wachstumsfunktion erfüllt die Differentialgleichung $f' = k \cdot f$. Bei exponentiellem Wachstum ist also das momentane Wachstum proportional zum aktuellen Bestand. Der Parameter k damit kann wie folgt interpretiert werden:
Wegen $k = \ln b = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \approx \frac{p}{100}$ gibt k das momentane prozentuale Wachstum in der Zeiteinheit dar. k = 0.07 bedeutet also eine momentane Wachstumsrate von 7%.

Verdopplungszeit τ

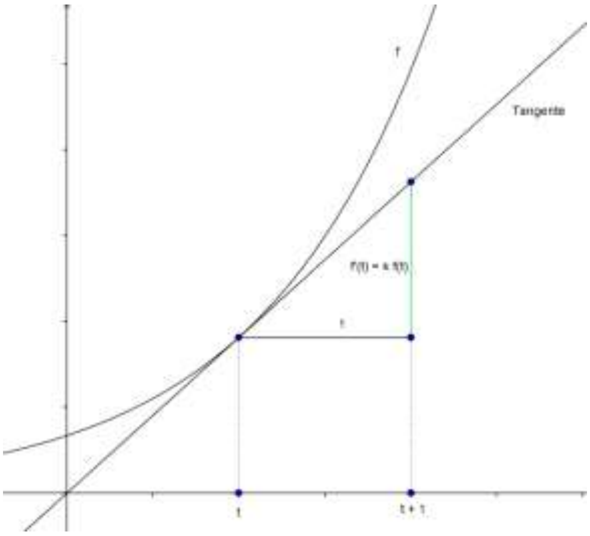
$$f(\tau) = 2f(0) = f(0) \cdot e^{k\tau} \qquad e^{k\tau} = 2 \qquad \tau = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{70}{p}$$

Die Verdopplungszeit ist unabhängig vom aktuellen Bestand.

Zum Unterschied zwischen
momentanem Wachstumsfaktor k (Steigung der Tangente)
und **mittlerem Wachstumsfaktor b** (Sekantensteigung)

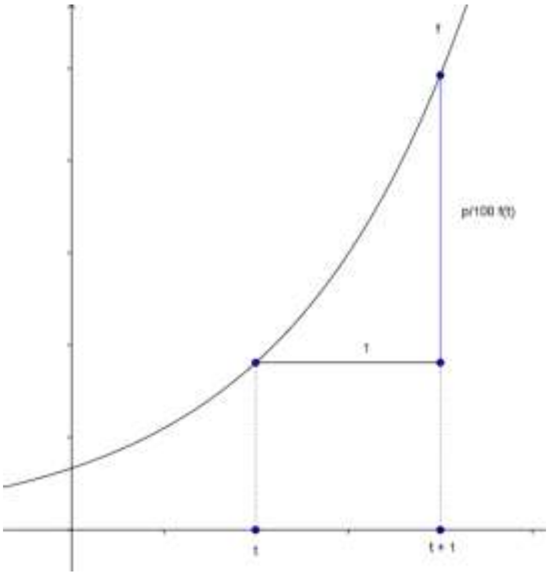
Geometrische Interpretation
Vergrössert man t um 1, so bringt dies

- einen Zuwachs der Tangente um das k-fache des Funktionswerts.



- so wird der Funktionswert mit b multipliziert
- so nimmt der Funktionswert um p% zu

wobei $b = 1 + \frac{p}{100}$



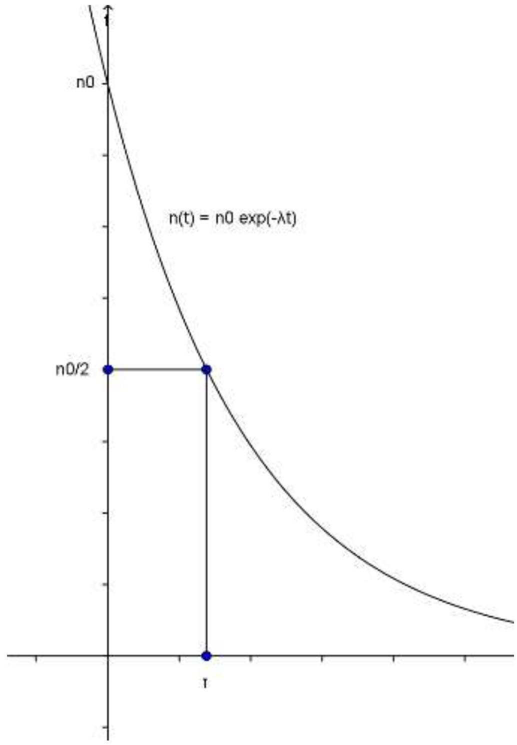
Da die Tangenten an die Exponentialkurven stets ganz unterhalb der Kurve verlaufen (bis auf den Berührungspunkt) ist k immer kleiner als $\frac{p}{100}$.

Im Unterschied dazu erfüllt die **lineare Wachstumsfunktion** die Differentialgleichung
$f' = c$
d.h. beim linearen Wachstum ist die **absolute Wachstumsgeschwindigkeit** ist konstant.

4.2. Exponentieller Zerfall

Ist bei der exponentiellen Wachstumsfunktion
$f(t) = a \cdot b^t$ 0 < b < 1, so wird in der
Darstellung $f(t) = a \cdot e^{kt}$ der Parameter k negativ.
Man setzt deshalb k = - λ . In diesem Fall spricht man von Abklingfunktionen bzw. von

exponentielle Zerfallsfunktion	
$f(t) = a \cdot e^{-\lambda t}$	t ≥ 0, a > 0, λ > 0



f ist streng monoton fallend und strebt für t → ∞ asymptotisch gegen die t-Achse y = 0.

Beispiel: **radioaktiver Zerfall**:
$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$

n_0:	Anzahl der zu Beginn vorhandenen Atomkerne
n(t):	Anzahl der Atomkerne zur Zeit t
λ	Zerfallskonstante

Exponentieller Zerfall zeichnet sich durch eine konstante Halbwertszeit τ aus. Nach der Halbwertszeit τ ist die Hälfte der ursprünglich vorhandenen Atomkerne zerfallen:

$n(\tau) = n_0 \cdot e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{2} n_0$ oder $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ (1)

Die Halbwertszeit ist also zu λ umgekehrt proportional.

Die Zerfallsfunktion erfüllt die Differentialgleichung
$\dot{n} = \frac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n$
Beim radioaktiven Zerfall trifft man also die Modellannahme, dass die momentane Zerfallsrate proportional zur Zahl der aktuell noch vorhandenen Atomkerne ist.

Aufgabe:
Bei der radioaktiven Umwandlung von Bismut 210 in Polonium 210 beträgt die Halbwertszeit τ = 5.0 Tage. Wie gross ist die Zerfallsrate?

Das Zerfallsgesetz heisst : $n(t) = n_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$

Aus der Gleichung $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = e^{-\lambda t}$ bzw. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{1}{5}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{5}} = e^{-\lambda}$ folgt λ = $\ln 2^{\frac{1}{5}}$

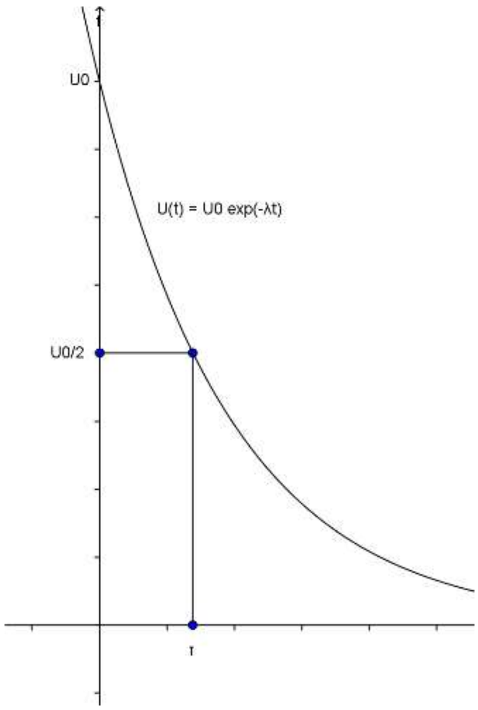
oder direkt aus (1)

Entladen eines Kondensators

In einem Kondensator werden elektrische Ladungen gespeichert. Das Speichervermögen eines bestimmten Kondensators wird durch seine Kapazität beschrieben. Beim Entladen eines Kondensators mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R klingt die Kondensatorspannung u exponentiell mit der Zeit ab:

$$u(t) = u_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

u_0: Kondensatorspannung zu Beginn
RC: Zeitkonstante



Experiment 1998 (hr)
C = 2360 µF, R = 200 Ω,
Spannungsquelle U_0 = 10 V

	berechnet	gemessen
Halbwertszeit:	0.327 s	0.33 s
gesamte Ladung	23.6 mAs	28.6. mAs

Übungsaufgabe: **Barometrische Höhenformel**

Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h (gemessen gegenüber dem Meeresniveau h = 0 gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur das Gesetz:

$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$ h in m, p_0 = 1.013 bar (Luftdruck auf Meereshöhe)
Der Luftdruck nimmt also mit zunehmender Höhe exponentiell ab

Aufgabe:

Wie gross ist der Luftdruck in den folgenden Höhen:
a) h_1 = 500 m, b) h_2 = 1000 m, c) h_3 = 2000 m,
d) h_4 = 5000 m, e) h_5 = 8000 m

Lösungen:
a) 0.952 bar b) 0.894 bar c) 0.789 bar d) 0.542 bar e) 0.372 bar