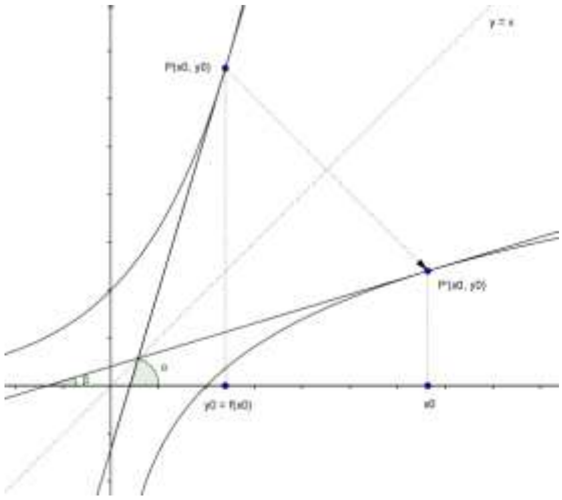
2. Ableitung der Umkehrfunktion

Es soll untersucht werden, welcher Zusammenhang zwischen der Ableitung einer Funktion und der Ableitung ihrer Umkehrfunktion besteht.



In der Abbildung der Graph der streng monoton wachsenden Funktion f im Punkt $P(x_0, y_0)$ die Tangentensteigung $\tan\alpha = f'(x_0)$.
Der Graph der Umkehrfunktion $\bar{f}$ hat als Spiegelbild bezüglich der 1. Winkelhalbierenden im Punkt $\bar{P}(y_0, x_0)$. Betrachtet man die kongruenten Steigungsdreiecke in der Abbildung mit den Steigungswinkeln α bzw. β, dann folgt $\beta = 90° - \alpha$, womit gilt:

$\tan\beta = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}$ oder also

$$\bar{f}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad \bar{f}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Ein rechnerischer Beweis:
Sei x_n eine beliebige Folge mit dem Grenzwert x_0
Nach Definition der 1. Ableitung gilt:

$f'(x_0) = \lim\limits_{x_n \to x_0} \dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim\limits_{x_n \to x_0} \dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$ und

$$\bar{f}'(y_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{f}(y_n) - \bar{f}(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{y_n - y_0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{y_n - y_0}{x_n - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Inversenregel:
Ist die im Intervall I umkehrbare Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar und ist $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion $\bar{f}$ an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt:

$\bar{f}'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ oder $\bar{f}'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

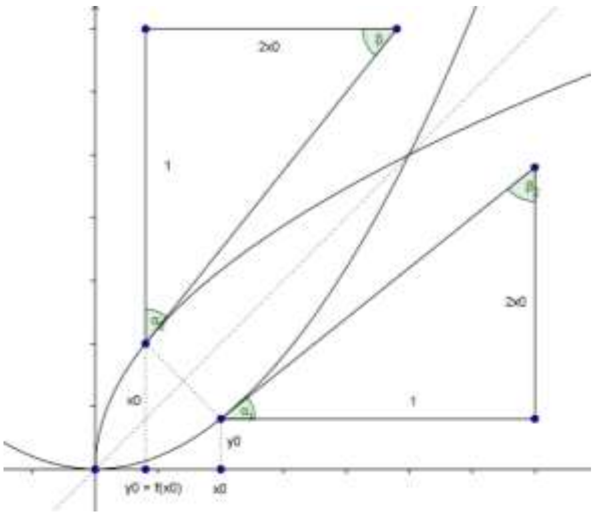
Quadratwurzel

Die Quadratfunktion $y = f(x) = x^2$ ist für nichtnegative x monoton wachsend und damit umkehrbar.
1. Ableitung: $f'(x) = 2x$
Gleichung der Umkehrfunktion: $x = \sqrt{y}$.
Nach der Inversenregel gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

und mit der üblichen Variablenbezeichnung:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad x > 0$$



Geometrische Überlegung.:
Offensichtlich sind die Tangentensteigungen in P_1 und P_2 zueinander reziprok.

Verallgemeinerte Potenzregel für $r \in Q$
Die Potenzfunktion $y = f(x) = x^n$ ist für nichtnegative x monoton wachsend und damit umkehrbar.
1. Ableitung: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Gleichung der Umkehrfunktion: $x = y^{\frac{1}{n}}$.
Nach der Inversenregel gilt:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{nx_0^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot \left(y_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot y_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot y_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot y_0^{\frac{1}{n}-1}$$

und mit der üblichen Variablenbezeichnung:

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \qquad x > 0$$

Verallgemeinerte Potenzregel:

$$\left(x^r\right)' = r \cdot x^{r-1} \qquad r \in Q \qquad r > 0$$

Beweis der Potenzregel:

Sei $r = \frac{m}{n}$ $\quad$ m ∈ Z, n ∈ N

$$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \left(\left(x^m\right)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \cdot \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot m \cdot x^{m-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-m+m-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$$

Exponential- und Logarithmusfunktion:

Die Exponentialfunktion $y = f(x) = e^x$ ist wegen $y = f'(x) = e^x > 0$ streng monoton wachsend und damit umkehrbar.

Gleichung der Umkehrfunktion: $x = \ln y$.
Nach der Inversenregel gilt:

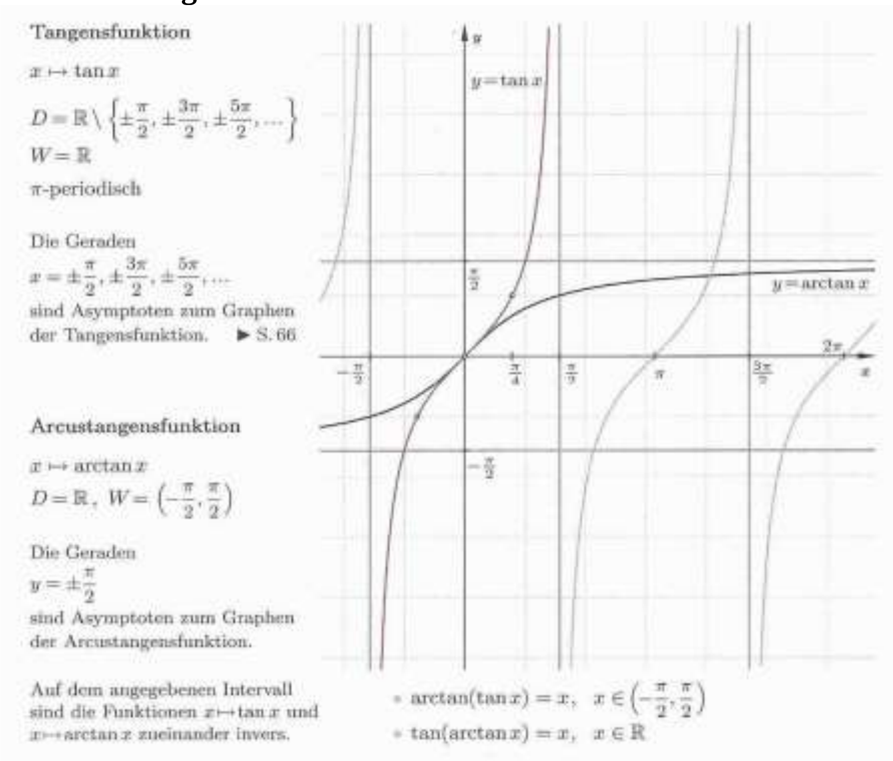
$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}$$

und mit der üblichen Variablenbezeichnung:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Die Arcustangensfunktion

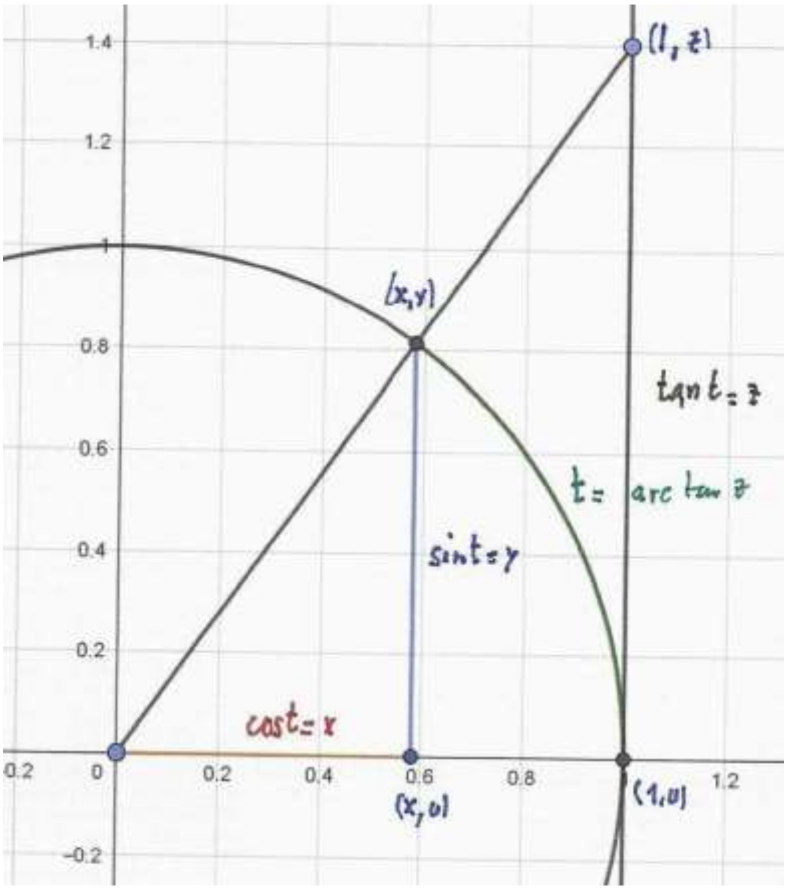


Ableitung der Arcustangensfunktion

Für die Herleitung ist die folgende Darstellung der Tangensableitung geeignet:

Bezeichnen wir den Winkel im Bogenmass mit t (grün dargestellt) dann gilt mit $\tan t = z$ für die Ableitung

$$(\tan t)' = \frac{1}{(\cos t)^2}$$
$$= \frac{(\cos t)^2 + (\sin t)^2}{(\cos t)^2}$$
$$= 1 + \frac{(\sin t)^2}{(\cos t)^2}$$
$$= 1 + (\tan t)^2 = 1 + z^2$$



Für die Ableitung der Umkehrfunktion des Tangens gilt damit nach der Inversenregel mit der gewohnten Variablen-bezeichnung

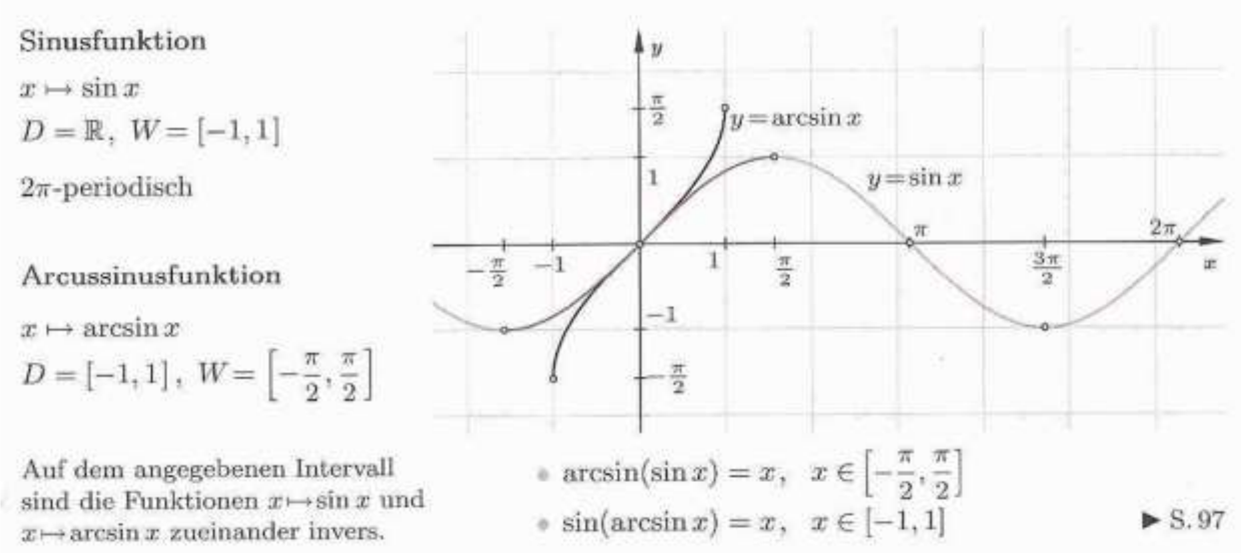
$$\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Mit anderen Worten gilt somit

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctan(x) + c$$

Mit ähnlichen Überlegungen erhält die Ableitungen der Arcussinus- und Arcuscosinusfunktion zu

Die Arcussinusfunktion

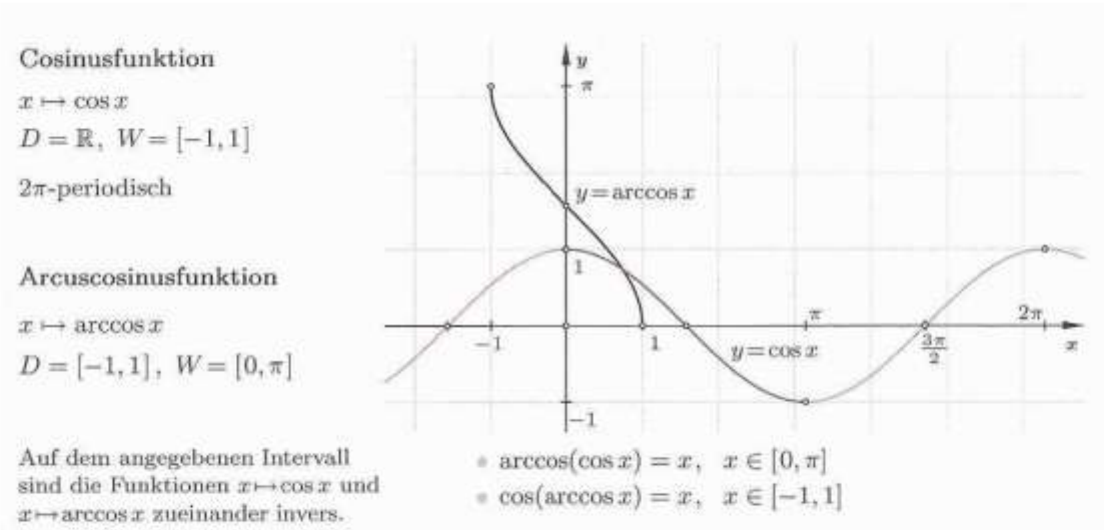


$$\left(\sin^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Mit anderen Worten gilt somit

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin(x) + c$$

Die Arcuscosinusfunktion



$$\left(\cos^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

Mit anderen Worten gilt somit

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -arccos(x) + c$$