

3. Algebraische Funktionen

Einführende Beispiele:

B1:

Löst man die algebraische Gleichung 1.Grades

$$2y + 4x^2 - 3x - 10 = 0$$

nach x auf, so erhält man

$$y = -2x^2 + \frac{3}{2}x + 5 \quad \text{Polynomfunktion (ganzrationale Funktion) 2.Grades}$$

B2:

Löst man die algebraische Gleichung 1.Grades

$$(x^2 + 1) \cdot y - 2x = 0$$

nach x auf, so erhält man

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1} \quad \text{Gebrochenrationale Funktion}$$

B3:

Durch Auflösen der algebraischen Gleichung 2.Grades

$$y - x^2 = 0$$

nach x erhält man die beiden Wurzelfunktionen

$$y = \pm\sqrt{x} \quad x \geq 0$$

B4:

Durch Auflösen der algebraischen Gleichung 2.Grades

$$x^2 + y^2 = r^2$$

erhält man

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{Graph: oberer bzw. unterer Halbkreisbogen}$$

weitere Beispiele sind die Kegelschnittgleichungen (Ellipse, Hyperbel, Parabel)

In Verallgemeinerung dieser Beispiele definiert man:

Definition.

Algebraische Funktionen sind Lösungen einer algebraischen Gleichung n-ten Grades in der Variablen y von der Form

$$a_n(x) \cdot y^n + a_{n-1}(x) \cdot y^{n-1} + \dots + a_1(x) \cdot y + a_0(x) = 0$$

dabei sind die Koeffizienten Polynome der Variablen x.

Bemerkung:

Wie die folgenden Beispiele zeigen, gibt es zu einer algebraischen Gleichung i.a. mehrere algebraische Funktionen.

Funktionen, die nicht algebraisch sind, heissen **transzendent**. Beispiele für transzendente Funktionen sind Exponential-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen.

Die folgende Beispiele sollen die Besonderheiten von algebraischen Kurven illustrieren:

Beispiel: Neil'sche Parabel

$$y^2 = \frac{1}{4}x^3 \quad (1)$$

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest:

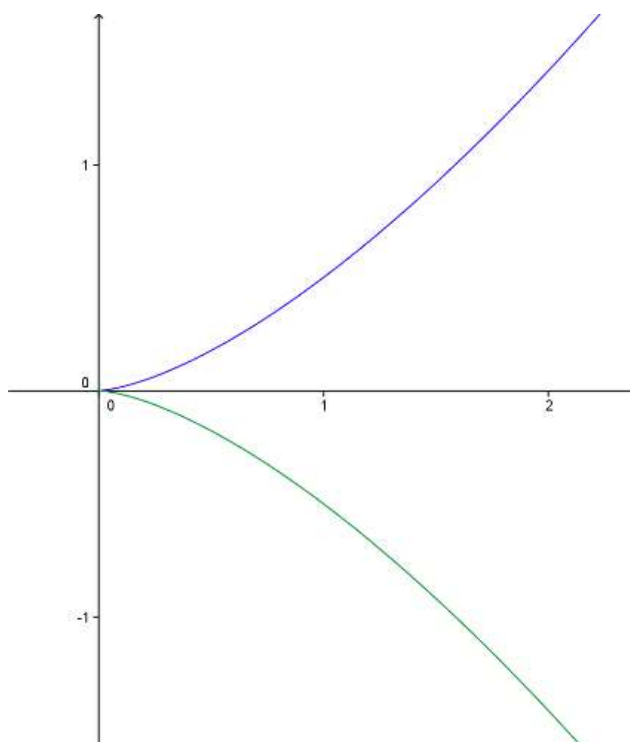
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x}$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{x} \quad x \geq 0$$

Ableitungen:

$$f'_{1,2}(x) = \pm \frac{3}{4}\sqrt{x} \quad \text{existiert für } x > 0$$

An der Stelle $x = 0$ existiert der rechtsseitige Grenzwert 0 der 1. Ableitung (anschaulich: die x-Achse ist Tangente). Die Graphen der beiden Funktionen bilden eine algebraische Kurve, deren Koordinaten die Gleichung (1) erfüllen. Die algebraische Kurve hat im Nullpunkt eine Spitze.



Beispiel (2)

$$y^2 = \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2) \quad (2)$$

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest

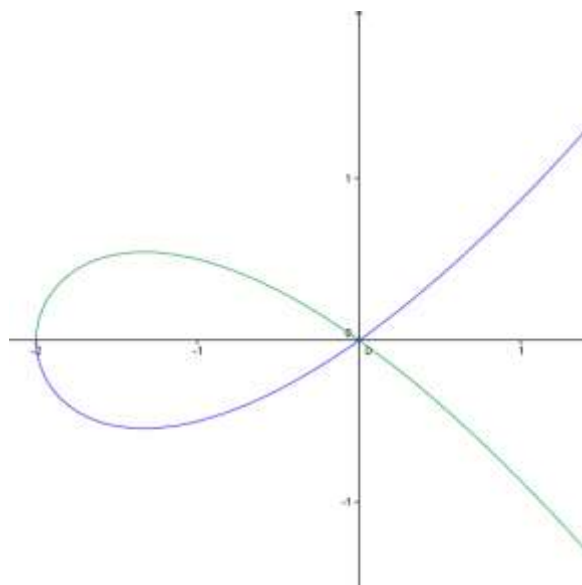
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x+2} \quad \text{Definitionsbereich: } x \geq -2$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{x+2} \quad \text{Definitionsbereich: } x \geq -2$$

Ableitungen: $f'_{1,2}(x) = \pm \frac{3x+4}{4\sqrt{x+2}}$ für $x > -2$

Der Graph hat an der Stelle $x = -2$ eine vertikale Tangente

Die Graphen der beiden Funktionen bilden eine algebraische Kurve, deren Koordinaten die Gleichung (2) erfüllen. Der Ursprung ist ein sogenannter Knotenpunkt



Beispiel (3)

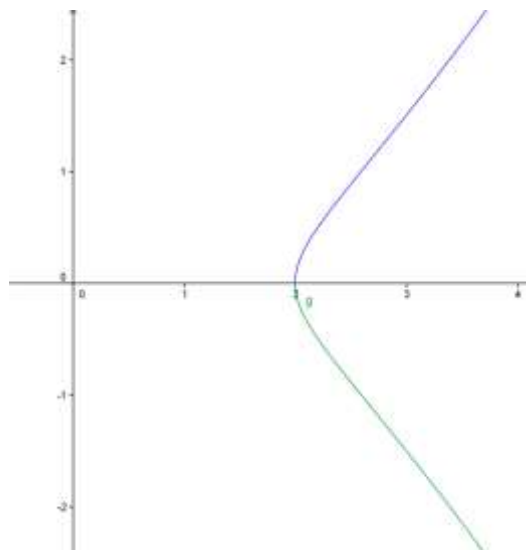
$$y^2 = \frac{1}{4}(x^3 - 2x^2) \quad (3)$$

Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest

$$f_{1,2}(x) = \pm \frac{1}{2} x \sqrt{x-2} \quad \text{Definitionsbereich: } x \geq 2$$

$$f'_{1,2}(x) = \pm \frac{3x-4}{4\sqrt{x-2}} \quad \text{existiert}$$

Die Ableitungen sind für $x > 2$ definiert.



Bemerkung:

An der Stelle $x = 0$ sind die beiden Funktionen nicht definiert, der Punkt $(0,0)$ erfüllt aber die algebraische Gleichung (3). Die algebraische Kurve hat einen sogenannten Einsiedler. An der Stelle 2 hat die algebraische Kurve eine vertikale Tangente.

Virtuelle Parabel nach Christian Huygens (1629-1695)

$$y^2 = \frac{x^2}{16} \cdot \sqrt{16-x^2}$$

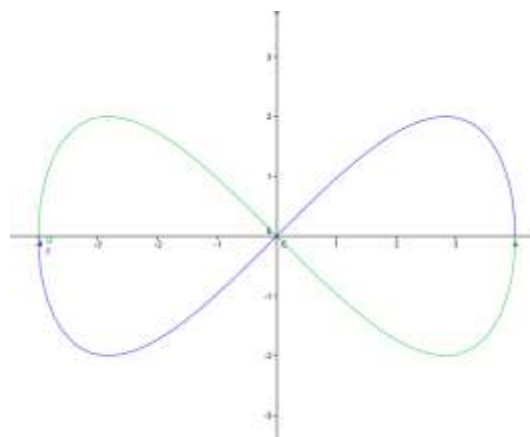
Diese algebraische Gleichung (Relation) legt zwei Funktionen fest

$$f_{1,2}(x) = \pm \frac{x}{4} \cdot \sqrt{16-x^2}$$

Definitionsbereich: $|x| \leq 4$

$$f'_{1,2}(x) = \frac{8-x^2}{2\sqrt{16-x^2}}$$

Der Graph hat horizontale Tangenten an den Stellen $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$. An den Stellen ± 4 sind die Tangenten vertikal.



Beispiel: (Quelle Bachmann: Analysis saBe)

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{x^2} - y \right)^2 - 1 = 0$$

