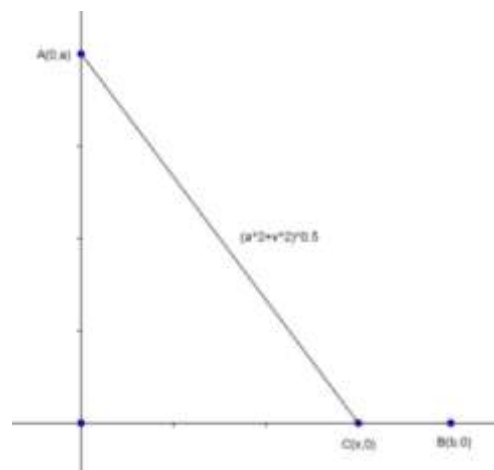


Ruderboot1

Eine Sportlerin befindet sich auf einem Ruderboot im Punkt $A(0,a)$ und will möglichst rasch den Punkt $B(b,0)$ am Ufer erreichen. Ihre Geschwindigkeit zu Wasser sein v , jene zu Lande w . Wo muss sie landen?



Zielfunktion:

Wenn die Sportlerin im Punkt $C(x,0)$ landet, dann beträgt ihre Zeit t :

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v} + \frac{b-x}{w} \quad x \in [0,b] \quad (1)$$

Bestimmung des Minimums:

$$t'(x) = \frac{x}{v \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{w} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{v \cdot \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{w} \quad \text{oder} \quad \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{v}{w}$$

Quadrieren führt auf

$$\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{v^2}{w^2} \quad \text{und nach kurzer Umformung auf} \quad x^2 = \frac{a^2 v^2}{w^2 - v^2}$$

1. Fall: $w \leq v$ (die Sportlerin rudert schneller als sie rennt)

In diesem Fall hat f' keine Nullstelle. Die Sportlerin wird direkt nach B rudern.

2. Fall: $w > v$

f' hat in diesem Fall die positive Nullstelle $x_0 = \frac{av}{\sqrt{w^2 - v^2}}$

1. Beispiel: $a = b = 4$, mit $v = 3$ und $w = 5$

Als Kandidaten für das Extremum kommen in Frage

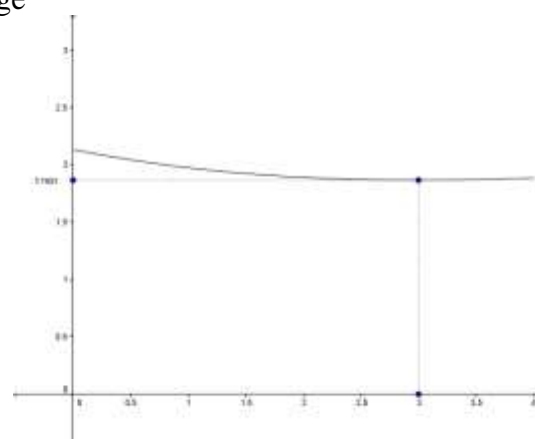
$x_0 = 3$ (Nullstelle der 1. Ableitung und die Randstellen 0 und 4

Aus der Zielfunktion ergeben sich die Werte

$$t(0) = \frac{32}{15} \approx 2.133, \quad t(3) = \frac{28}{15} \approx 1.867 \quad \text{und}$$

$$t(4) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1.886$$

Die Zeit wird damit für $x = 3$ minimal.



2. Beispiel: $a = 4$ und $b = 2$, mit $v = 3$ und $w = 5$

In diesem Fall liegt die Nullstelle der 1. Ableitung wegen $3 > b$ ausserhalb. Damit kommen für das Minimum nur die Randstellen in Frage

$$t(0) = \frac{26}{15} \approx 1.733, \quad \text{und} \quad t(2) = \frac{\sqrt{20}}{3} \approx 1.491$$

Die Sportlerin sollte in diesem Fall direkt nach B rudern.