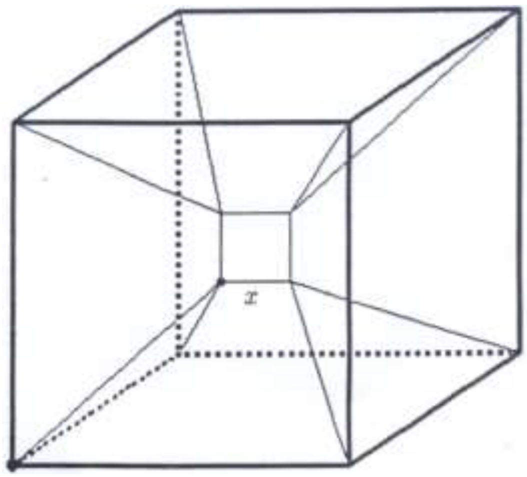
Seifenhaut

Benetzt man ein Drahtgestell mit Seifenlauge, so ist die Seifenhaut bestrebt, eine möglichst kleine Oberfläche einzunehmen, Obwohl die aus Seifenhaut bestehenden Teilflächen leicht gekrümmt sind, nehmen wir sie der Einfachheit halber als eben an. Bei dem in der Skizze abgebildeten würfelförmigen Drahtgestell besteht die Seifenhaut aus einem Quadrat, acht kongruenten gleichschenkligen Trapezen und vier kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Für welche Wahl der Quadratseite wird die Oberfläche der Seitenhaut minimal?



1. Zielfunktion
Wir betrachten ein Koordinatensystem, dessen Ursprung in der vorderen unteren linken Ecke des Würfels liegt (Rechtssystem). Die ausgezeichnete Quadratecke hat dann die Koordinaten
$\left(\frac{1}{2}\cdot(1-x)\right), \left(\frac{1}{2}\cdot(1-x)\right)$
x Quadratseite, d Höhe eines Dreiecks, t Höhe eines Trapezes
$O = x^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot d + 8\cdot\frac{1}{2}(1+x)\cdot t$
2. Nebenbedingungen nach Pythagoras:
$d = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(1-x) \qquad t = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2-2x+2}$
3. Zielfunktion mit einer Variablen
$O(x) = x^2 + \sqrt{2}\cdot(1-x) + 2\cdot(1+x)\cdot\sqrt{x^2-2x+2}$
minimal im Intervall]0,1[
4. $O'(x) = 2x - \sqrt{2} + \frac{2\cdot\left(2x^2-2x+1\right)}{\sqrt{x^2-2x+2}} = 0$
Mit einem numerischen Verfahren erhält man x = 0.07291 und für die minimale Oberfläche 4.242531 (die Funktionswerte unterscheiden sich im Intervall [0,0.1] erst ab der vierten Dezimalstelle.