Ableitung der Umkehrfunktion, Algebraische Funktionen

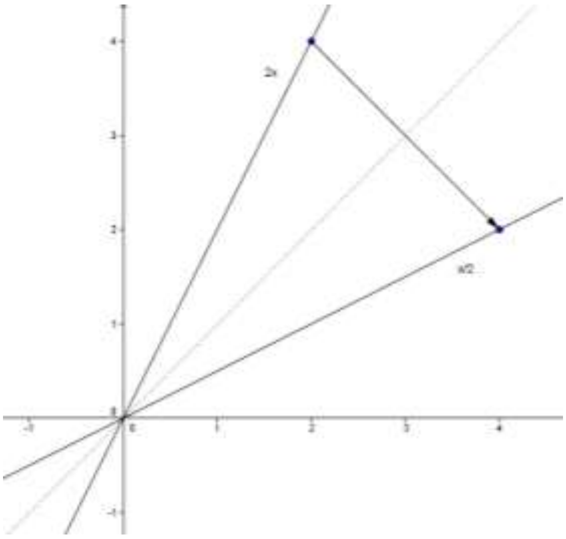
1.Umkehrfunktionen

Frage:
Lässt sich die Wirkung einer Funktion f allenfalls rückgängig machen? Kann aus dem Funktionswert (aus dem Bild) auf das Argument (das Original) geschlossen werden?

Einführende Beispiele

B1:

Funktion f:	Umkehrfunktion
Verdoppler	$\bar{f}$: Halbierer
$f: x \xrightarrow{\cdot 2} y = 2x \qquad x \in R$	$\bar{f}: x \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} y = \frac{1}{2}x$
verdopple	halbiere

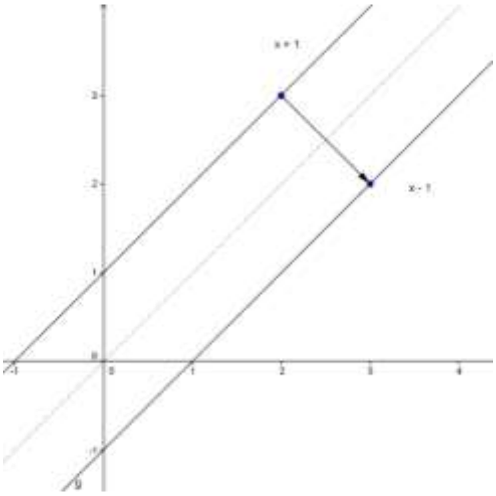


Rechnerisches Verfahren:

1. Die Gleichung $y = 2x$ wird für gegebenes y nach x auf: $x = \frac{1}{2}y$
2. Die Variablen x und y: $x = \frac{1}{2}y$ werden vertauscht

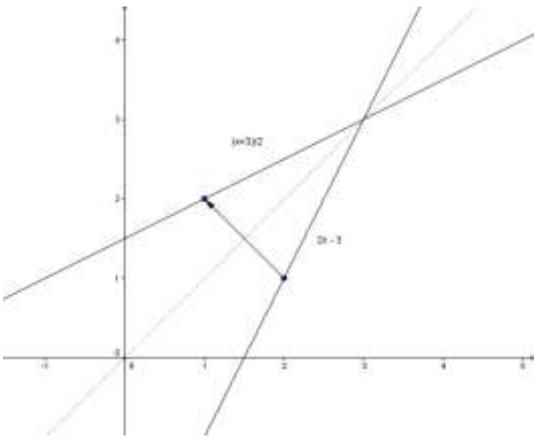
B2:

Funktion f:	Umkehrfunktion $\bar{f}$:
1-Addierer	1-Subtrahierer
$f: x \xrightarrow{+1} y = x + 1 \quad x \in R$	$\bar{f}: x \xrightarrow{\cdot -1} y = x - 1$
Addiere 1	subtrahiere .1



B3:

Funktion f:	Umkehrfunktion $\bar{f}$:
$f: x \xrightarrow{+1} y = 2x - 3 \quad x \in R$	$\bar{f}: x \xrightarrow{\cdot -1} y = \frac{1}{2}(x + 3)$
verdopple und subtrahiere 3	addiere 3 und halbiere



Vergleich (😊)
morgens: zuerst Socken anziehen, dann Schuhe anziehen
abends: zuerst Schuhe ausziehen, dann Socken ausziehen!

Allgemein:

> Definition:
> Die Funktion f mit dem Definitionsbereich D und dem Wertebereich W heisst umkehrbar, wenn die Gleichung y = f(x) für jedes y aus W eindeutig nach x aufgelöst werden kann. Die dadurch bestimmte Funktion $\bar{f}$ heisst Umkehrfunktion der Funktion f.

Regel zur Bestimmung der Umkehrfunktion:
1. Lösung der Funktionsgleichung y = f(x) für gegebenes $y \in W$ nach x.
2. Vertauschung der Variablen x und y.

Bemerkung
Die Vertauschung der Variablen x und y bewirkt eine Spiegelung des Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden.
Der Wertebereich der Funktion f wird zum Definitionsbereich der Umkehrfunktion $\bar{f}$ und umgekehrt der Definitionsbereich der Funktion f zum Wertebereich der Umkehrfunktion $\bar{f}$.

Folgerung:
$\bar{f}\left(f\left(x\right)\right) = x \quad x \in D$

Damit eine Funktion f umkehrbar ist, muss einem gegebenen y des Wertebereichs eindeutig ein bestimmter x-Wert zugeordnet sein, d.h. zu verschiedenen Argumenten gehören verschiedenen Funktionswerte. Für den Graph der Funktion f bedeutetet dies: eine Parallele zur x-Achse schneidet den Graphen von f in höchstens einem Punkt. Dies führt zur folgenden

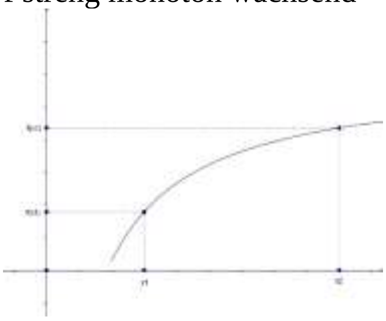
> Satz:
> Ist eine Funktion f in einem Intervall streng monoton wachsend oder fallend, dann ist sie umkehrbar.

Bemerkung:
Die Monotonie kann etwa mit der 1. Ableitung überprüft werden.

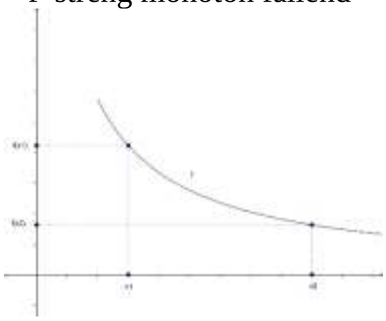
Bei einer umkehrbaren Funktion schneidet jede Parallele zur x-Achse den Graphen von f in höchstens einem Punkt, damit entsprechen verschiedenen x-Werten auch verschiedene Funktionswerte. Dies führt auf die folgende Definition:

> Definition:
> f heisst **injektiv** genau dann, wenn gilt: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

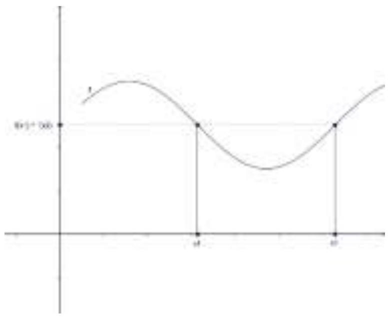
f streng monoton wachsend



f streng monoton fallend

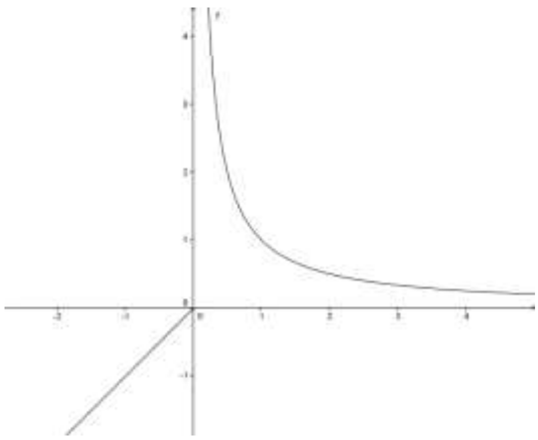


f nicht injektiv



Für die Umkehrbarkeit einer Funktion ist die Monotonie zwar hinreichend, aber nicht notwendig Die Umkehrung gilt aber nicht, wie das folgende Beispiel einer nicht monotonen, aber umkehrbaren Funktion zeigt:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} x & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{Bmatrix}$$



Ist eine Funktion f nicht injektiv, dann kann sie auf einem Teilintervall umkehrbar sein:

B4:

$f : x \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \quad D = [0,\infty[\quad W = \left]\frac{3}{2},\infty\right[$

Der Graph der Funktion f ist eine nach oben geöffnete Parabel mit dem Scheitel S(0, $\frac{3}{2}$).
Schränkt man den Definitionsbereich der Funktion ein zu $D = [0,\infty[$, dann ist die Funktion injektiv.

$f: \quad x \xrightarrow{quadrieren} u \xrightarrow{halbieren} v \xrightarrow{\frac{3}{2}\ addieren} y$

$\bar{f}: \quad x \xleftarrow{Wurzel} u \xleftarrow{verdoppeln} v \xleftarrow{\frac{3}{2}\ subtrahieren} y$ oder

$\bar{f} : x \rightarrow y = \sqrt{2x-3} \quad D = \left]\frac{3}{2},\infty\right[\quad W = [0,\infty[$

Übungsaufgabe :
Bestimme für die Funktion f die Gleichung der Umkehrfunktion :

$f : x \rightarrow y = 2 \cdot \sqrt{x-1} + 3 \quad D = \left]1,\infty\right[\quad W = [3,\infty[$

Lösung :

$f : x \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 1 \quad D = [3,\infty[\quad W = \left]1,\infty\right[$