3. Ableitung von weiteren Funktionen

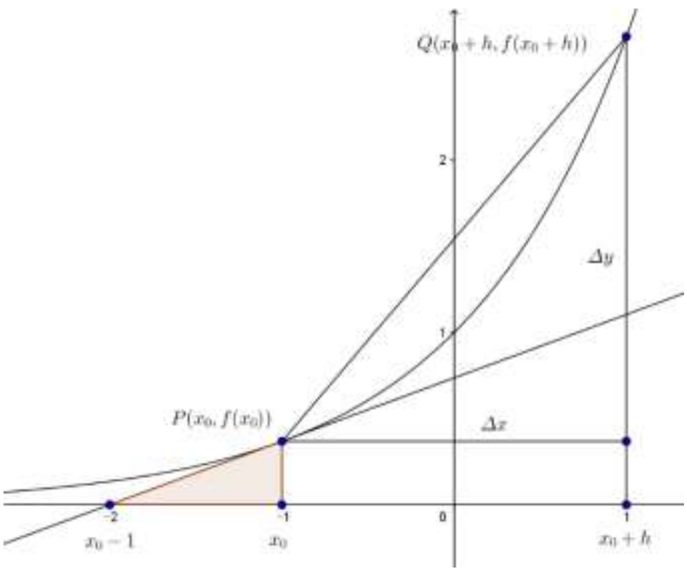
Exponentialfunktion:

Die Eulerschen Zahl e ist als Grenzwert definiert:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = 2.18281828459045...$$

Wegen $e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^h$ gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\cdot\frac{e^h - 1}{h}$$



Die 1. Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 wird damit auf die 1. Ableitung an der Stelle 0 zurückgeführt. Die Vorzugsrolle der Basis e ist darin begründet, dass für diese Basis der Grenzwert 1 ist.
(ohne Beweis, Test mit dem TR).

Damit gilt:

$$f'(x_0) = e^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}$$

$\left(e^x\right)' = e^x$	Ableitung der Exponentialfunktion

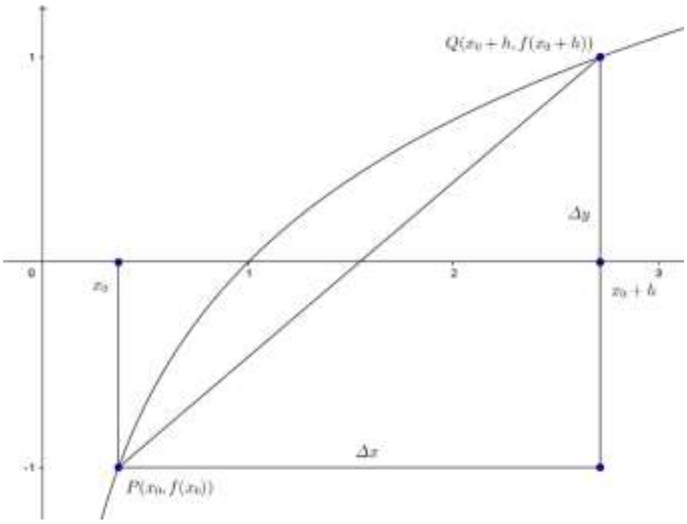
Bemerkung:
Für die Eulersche Basis stimmen also an jeder Stelle Funktionswert und 1. Ableitung überein.
Geometrisch bedeutet dies, dass man die Kurventangente im Punkt $P\left(x_0, e^{x_0}\right)$ erhält, indem man den Punkt $\left(x_0 - 1, 0\right)$ auf der x-Achse mit P verbindet.

Unterschiede:
Potenzfunktionen werden nach der Potenzregel abgeleitet.
Der Exponent ist eine vorgegebene Zahl, die Basis ist variabel. $\left(x^n\right)' = n\cdot x^{n-1}$
Bei Exponentialfunktionen ist die Basis eine vorgegebene Zahl, die Variable steht im Exponenten: $\left(e^x\right)' = e^x$

Logarithmusfunktion

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Ihr Graph ergibt sich aus dem Graphen der Exponentialfunktion durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.
Mit der später besprochenen Regel zur Berechnung der Ableitung der Umkehrfunktion kann gezeigt werden, dass gilt:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad x > 0$$



Herleitungsvariante:

Der Differenzenquotient der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird geeignet umgeformt:

$$\frac{\ln(x_0+h_n) - \ln x_0}{h_n} = \frac{1}{h_n} \cdot \ln\left(\frac{x_0+h_n}{x_0}\right) = \frac{1}{h_n} \cdot \ln\left(1 + \frac{h_n}{x_0}\right) \quad (*)$$

Wir wählen nun die Folge h_n so, dass gilt:

$$\frac{h_n}{x_0} = \frac{1}{n} \text{ bzw. } h_n = \frac{x_0}{n}$$

Diese Folge hat für n gegen unendlich den Grenzwert 0. Damit kann der Differenzenquotient (*) in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{\ln(x_0+h_n) - \ln x_0}{h_n} = \frac{n}{x_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Nach der Definition der 1. Ableitung gilt somit:

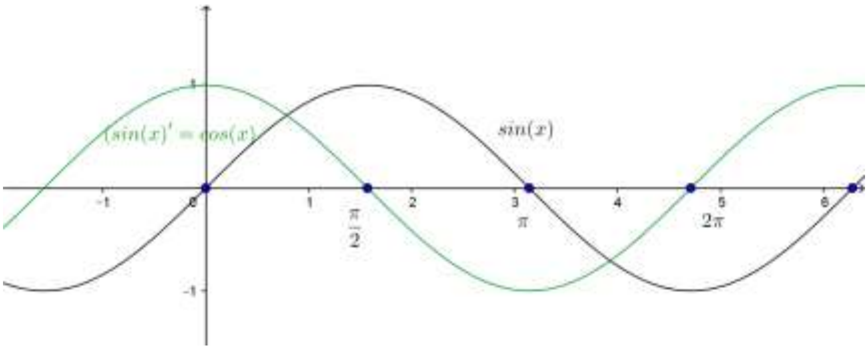
$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln e = \frac{1}{x_0}$$

Dabei wird verwendet, dass Logarithmus- und Grenzwertbildung vertauschbar sind.

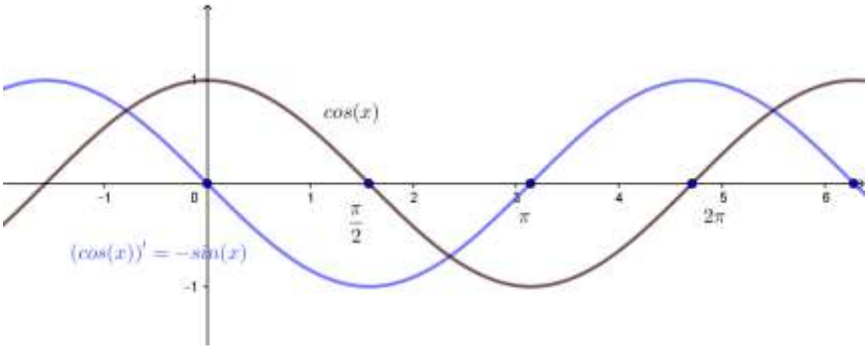
Trigonometrische Funktionen

Aus der geometrischen Interpretation der 1. Ableitung als Tangentensteigung des Graphen ergeben sich unmittelbar Vermutungen für die Ableitung der Sinus- bzw. Cosinusfunktion (die Graphen der Ableitungen sind grün bzw. blau gefärbt).

$$\boxed{(\sin x)' = (\cos x)'}$$



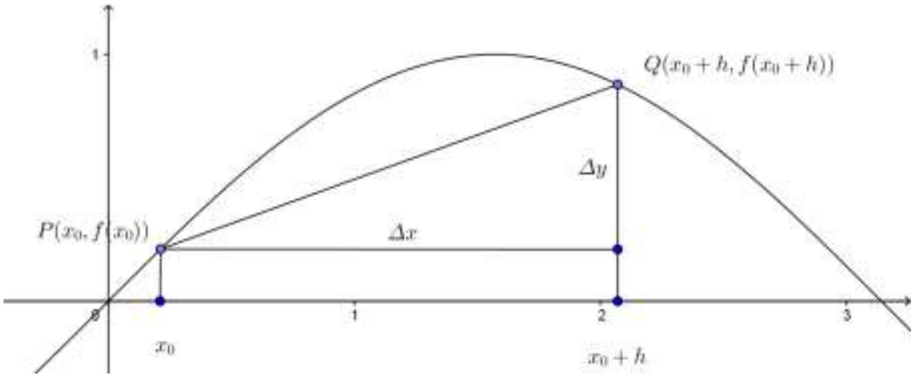
$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$$



Bei der Herleitung der 1. Ableitung nach Definition benötigt man den folgenden Grenzwert:

$\lim\limits_{h'\to 0}\dfrac{\sin h'}{h'} = 1$ (1)

und das Additionstheorem: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = 2\cdot\frac{\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \quad \text{sei } h' = \frac{h}{2}$$

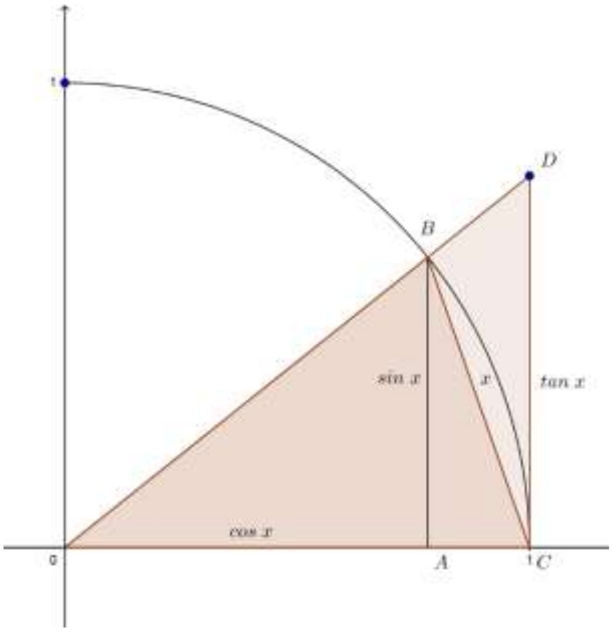
Da der Grenzwert eines Produkts gleich dem Produkt der Grenzwerte ist gilt:

$$f'(x_0) = \lim_{h'\to 0}\cos(x_0+h')\cdot\lim_{h'\to 0}\frac{\sin h'}{h'} = \cos x_0\cdot 1 = \cos x_0$$

Die Cosinuskurve entsteht aus der Sinuskurve durch eine Verschiebung in negativer x-Richtung um $\frac{\pi}{2}$ d.h. es gilt: $\cos x = \sin\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)$. Später folgt nach der Kettenregel:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin x$$

Beweis des Grenzwerts (1)



Es ist zu zeigen: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Beim Beweis geht man vom folgenden Flächenvergleich aus.

Die doppelte Fläche des Dreiecks OCB
ist kleiner oder gleich
der doppelten Fläche des Sektors OCB
und kleiner oder gleich
der doppelten Fläche des Dreiecks OCD.

Sei $0 < x < \frac{\pi}{2}$
$\sin x \le x \le \tan x$
Dividiert durch $\sin x > 0$
$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{\tan x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x}$
Dann gilt für die Kehrwerte (Wechsel des Ungleichheitszeichens)
$1 \ge \frac{\sin x}{x} \ge \cos x$ Grenzübergang
$\lim\limits_{x\downarrow 0} \ge \lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x} \ge \lim\limits_{x\downarrow 0}\cos x$
$1 \ge \lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x} \ge 1$
Daraus folgt die Behauptung damit die Behauptung.
$\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
Wegen $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ gilt auch $\lim\limits_{x\uparrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

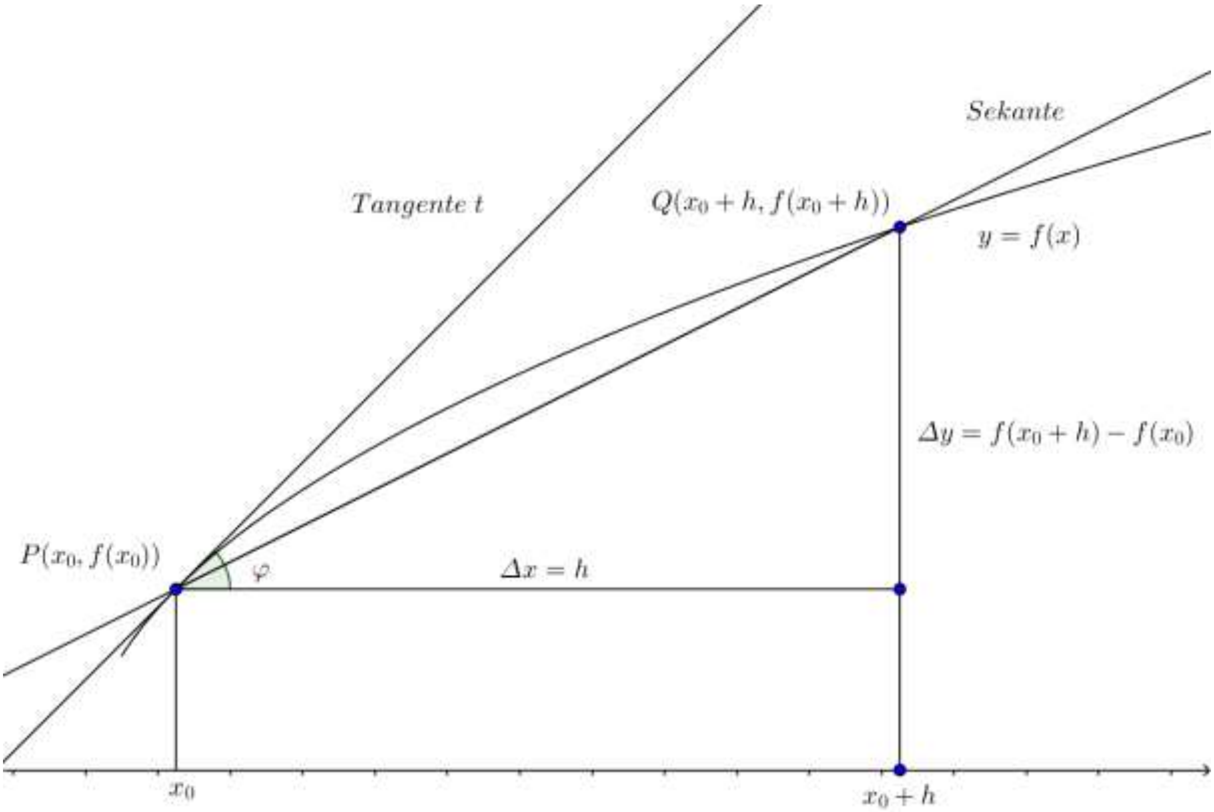
Folgerung:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$
Dazu formt man den Term folgendermassen um:
$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x\cdot(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x\cdot(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}$$
Der erste Faktor hat den Grenzwert 1, der zweite den Grenzwert 0, woraus die Behauptung folgt.

Zusammenfassung

Die erste Ableitung einer Funktion f: D → R ist als Grenzwert des Differenzenquotienten definiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Man sagt auch: Die Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar.



Wichtig sind in Anwendungen die verschiedenen Interpretationen der 1. Ableitung

Differenzenquotient	Differentialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten
Sekantensteigung	Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigungen
mittlere Geschwindigkeit	Momentangeschwindigkeit als Grenzwert der mittleren G.
mittlere Änderungsrate	momentane Änderungsrate als Grenzwert der mittleren Änd. Rate

Geometrische Deutung der Ableitung:
Zwischen der Steigung der Tangente an einer Stelle x_0 und dem Steigungswinkel φ besteht der Zusammenhang:

$$f'(x_0) = \tan \varphi$$