4. Einfache Ableitungsregeln, höhere Ableitungen

Die Beweise der folgenden einfachen Ableitungsregeln verwenden die Definition der 1. Ableitung und die Grenzwertsätze für eine Summe zweier Funktionen bzw. für einen konstanten Faktor.

1. Beispiel:
(4)' = 0
Allgemein:

$$(c)' = 0$$

Die Ableitung einer konstanten Funktion ist 0 (der Graph ist eine horizontale Gerade).

2. Beispiel:

$$\left(3x^2\right)' = 3\cdot\left(x^2\right)' = 3\cdot 2x$$

allgemein: $(\mathrm{c}\cdot\mathrm{f})' = \mathrm{c}\cdot\mathrm{f}'$ $\quad$ $\mathrm{c}\in\mathrm{R}$ konstanter Faktor
Ein **konstanter Faktor** bleibt beim Differenzieren erhalten

3. Beispiel:

$$\left(x^3+x^2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(x^2\right)' = 3x^2+2x$$

allgemein: $(\mathrm{f}\pm\mathrm{g})' = \mathrm{f}'\pm\mathrm{g}'$ $\quad$ **Summenregel**
Die Ableitung einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe bzw. Differenz der Ableitungen. Das heisst Ableitung und Summation sind vertauschbar.

Aber: $\left(\mathrm{x}^3\cdot\mathrm{x}^2\right)' \neq \left(\mathrm{x}^3\right)'\cdot\left(\mathrm{x}^2\right)'$
Die Ableitung eines Produkts ist **nicht** gleich dem Produkt der Ableitungen.

4. Beispiel:

$$\left(x^2+3\right)' = \left(x^2\right)' = 2x$$

allgemein: $(\mathrm{f}+\mathrm{c})' = \mathrm{f}'$ $\quad$ $\mathrm{c}\in\mathrm{R}$ konstanter Summand
Ein **konstanter Summand** fällt beim Differenzieren weg.

Der Summand c bewirkt eine Translation des Graphen in y-Richtung, bei der sich die Steigung nicht ändert.

Beispiele:

$$\left(\tfrac{1}{2}x^4+2x^3+\pi^2\right)'=\tfrac{1}{2}\cdot(x^4)'+2\cdot(x^3)'+(\pi^2)'=2x^3+6x^2$$

$$\left(2\sin x-3\cos x+\sqrt{2}\right)'=2\cos x+3\sin x$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'=\left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)'=2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$ Wurzeln als Potenzen schreiben!

$$\left(\sqrt{3x}\right)'=\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}\right)'=\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{3}{2\cdot\sqrt{3x}}$$ → Kettenregel

In den folgenden Beispielen kann die fehlende Produktregel durch Ausmultiplizieren umgangen werden:

$$\left((x-3)\cdot(2x+1)\right)'=\left(2x^2-5x-3\right)'=4x-5$$

$$\left(\left(x^3-2\right)^2\right)'=\left(x^6-4x^3+4\right)'=6x^5-12x^2$$ →Kettenregel

$$=2\cdot\left(x^3-2\right)\cdot 3x^2$$

Es ist zu beachten, dass
die Ableitung eines Quotienten ist **nicht** gleich dem Quotient der Ableitungen ist.

$$\left(\frac{x^5+2}{3}\right)'=\left(\tfrac{1}{3}\left(x^5+2\right)\right)'=\tfrac{1}{3}\left(x^5+2\right)'$$ Konstantenregel anwenden

$$=\tfrac{1}{3}\cdot 5x^4=\tfrac{5}{3}x^4$$

$$\left(\frac{x^3+2}{x}\right)'=\left(x^2+\frac{2}{x}\right)'=\left(x^2+2\cdot x^{-1}\right)'$$ Ausdividieren, Potenzregel

$$=2x-2\cdot x^{-2}=2x-\frac{2}{x^2}$$

$$\left(e^{x-1}\right)'=\left(e^x\cdot e^{-1}\right)'=e^{-1}\cdot e^x=e^{x-1}$$ konstanter Faktor,
Potenzgesetze anwenden

$$\left(\ln(3x)\right)'=\left(\ln 3+\ln x\right)'=\frac{1}{x}$$ Logarithmengesetze anwenden
konstanter Summand

$$\left(\log_a x\right)'=?$$ wird auf die Basis e zurückgeführt.

$\log_a x=y$ ist gleichbedeutend mit $x=a^y$. Beide Seiten der Gleichung werden logarithmiert zur Basis e:

$y\cdot\ln a=\ln x$ oder $y=\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$

$$\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\left(\ln x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

Damit gilt:

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

Ist f ' wieder differenzierbar, so heisst die erste Ableitung von f ´ 2. Ableitung und wird mit f " bezeichnet. In dieser Weise erhält man $f''', \ldots$

allg. rekursive Definition

$f^{(0)} = f$ und $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

Beispiele:

$\left(x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + 3x - 1\right)''' = 3!$

$\left(\sin x\right)'' = -\sin x$

Man sagt:
$\sin x$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y'' = -y$. Bei einer Differentialgleichung sind also Funktionen gesucht, die eine Gleichung erfüllen, welche die unbekannte Funktion y und die Ableitungen y', y'',.. enthält.

Beim exponentiellen Wachstum ist die momentane Wachstumsrate proportional zum aktuellen Bestand, d.h. es gilt:
$\dot{y} = \lambda \cdot y$.
Sie hat die allgemeine Lösung:
$y = f(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$

Physikalische Probleme führen oft auf Differentialgleichungen. Als Beispiel sei die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung erwähnt:
$\ddot{y} = -\omega^2 y$ mit der allgemeinen Lösung $y = a \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right)$.

Das Thema Differentialgleichungen wird im Kapitel Analysis 2 ausführlich behandelt.