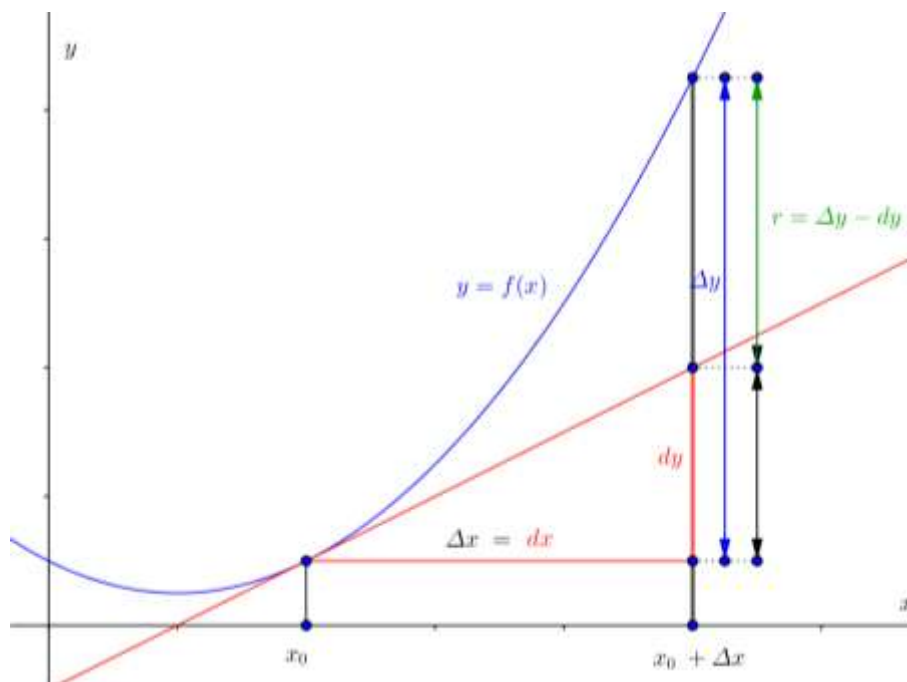


9. Differentiale, Fehlerrechnung

Bei den Anwendungen der Differentialrechnung spielt der geometrische Aspekt (Tangentensteigung) eine untergeordnete Rolle. Ableitungen sind deshalb wichtig, weil sie eine Information über das Änderungsverhalten einer Funktion in der Umgebung einer Stelle geben. Die Gleichung der Tangente ist die bestmögliche lineare Ersatzfunktion. Diese Eigenschaft führt auf den Begriff des Differentials. Differentiale spielen insbesondere in der Fehlerrechnung bei der Untersuchung der Fortpflanzung von Messfehlern eine wichtige Rolle.



Wächst x um Δx , so verändert sich y um Δy . Der entsprechende Zuwachs der linearen Ersatzfunktion wird mit dy bezeichnet.

Wegen $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$ gilt: (1)

$$dy = f'(x_0) dx \quad (2)$$

dx und dy heißen Differentiale.

Wegen (1) kann die 1. Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten neu als Quotient zweier Differentiale dargestellt werden. Die Bedeutung von (2) liegt darin, dass für "kleine" $dx = \Delta x$ die Veränderung Δy näherungsweise durch $dy = f'(x_0) dx$ ersetzt werden kann.

Diese Aussage kann auch in der folgenden Form dargestellt werden:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + r$$

$r = \Delta y - dy$ ist der Fehler, den man begeht, wenn man f durch die lineare Ersatzfunktion ersetzt. Die Approximation ist umso besser, je kleiner die Veränderung dx von x ist.

Beispiele:

1.

Angenäherte Berechnung von Funktionswerten:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{9.1} = \sqrt{9+0.1} \approx \sqrt{9} + dy = 3 + f'(9) \cdot dx = 3 + \frac{1}{6} \cdot 0.1 = 3.016666..$$

Der Taschenrechner liefert den Wert: 3.0166206...

Damit beträgt der absolute Fehler

$$r \approx 0.000046... \text{ und der relative Fehler } \frac{r}{f(9)} < 0.1\%$$

$\sin(31^\circ) = ?$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + dy = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.5151$$

Der absolute Fehler ist kleiner als 0.00015

2.

Näherungsformeln

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad x_0 = 1 \quad dy = f'(1) \cdot dx = n \cdot dx$$

ersetzt man dx durch x , dann ergibt sich die folgende Näherungsformel:

$$(1+x)^n \approx 1+n \cdot x \quad x \ll 1 \quad (3)$$

speziell für

$$n = 2$$

$$(1+x)^2 \approx 1+2x \quad x \ll 1 \quad 1.02^2 \approx 1.04$$

$$n = -1$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x \quad x \ll 1 \quad \frac{1}{1.03} = \frac{1}{1+0.03} \approx 1-0,03 = 0.97$$

$$n = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \quad x \ll 1 \quad \sqrt{16.5} = 4\sqrt{1.03125} \approx 4(1+0.015625) = 4.0625$$

TR: 4.062019..

Bemerkung:

Das Ergebnis (3) entspricht den ersten beiden Summanden in der Entwicklung des Binomischen Lehrsatzes.

Analog erhält man:

$$e^x \approx 1+x \quad x \ll 1$$

$$\sin x \approx x \quad x \ll 1$$

3.1

Anwendung der Differentiale in der Fehlerrechnung

Wir betrachten das Problem der sogenannten Fehlerfortpflanzung:

Messwerte sind i.a. mit einem Fehler behaftet. Der genaue Wert sei x_0 , der effektiv gemessene Wert sei x . Die Differenz $\Delta x = x - x_0$ heisst absoluter Fehler, $\frac{\Delta x}{x_0}$ relativer Fehler.

Wird mit einer gemessenen Grösse x eine andere Grösse $f(x)$ berechnet, so bewirkt der Fehler Δx einen Fehler $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, wobei $f(x_0)$ der wahre Wert, $f(x)$ der aus x berechnete Wert ist. Es ist die Aufgabe der Fehlerrechnung diese Fehlerfortpflanzung zu untersuchen. Es gilt der folgende

Satz:

Ist x_0 mit dem hinreichend kleinen Fehler $\Delta x = dx$ behaftet, so gilt für den absoluten Fehler Δy der berechneten Grösse näherungsweise

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \cdot dx$$

für den relativen Fehler näherungsweise:

$$\frac{\Delta y}{f(x_0)} \approx \frac{dy}{f(x_0)} = \frac{f'(x_0)dx}{f(x_0)}$$

Beispiele

3.1

Der Radius eines Kreises wurde zu $r_0 = 100 \text{ mm}$ mit einer Messgenauigkeit von $\pm 0.5 \text{ mm}$ genau gemessen. Wie überträgt sich der Messfehler des Radius auf den Inhalt der Kreisfläche?

Inhalt der Kreisfläche:

$$A(r) = \pi r^2 \quad A'(r) = 2\pi r$$

Fehler der Kreisfläche:

$$\Delta A \approx dA = 2\pi r_0 \cdot dr \quad (1)$$

Für den relativen Fehler gilt damit:

$$\frac{\Delta A}{A(r_0)} \approx \frac{2\pi r_0 dr}{\pi r_0^2} = \frac{2dr}{r_0}$$

d.h. der relative Fehler der Kreisfläche ist etwa doppelt so gross wie der Messfehler des Radius.

Bemerkung zu (1):

Durch die Radiusveränderung vergrössert sich der Kreisinhalt um die Fläche eines Kreisrings.

(1) bedeutet, dass diese Kreisringfläche ungefähr durch ein

Rechteck mit dem Kreisumfang $2\pi r_0$ und dr als Seiten angenähert werden kann.

3.2

Der Radius einer Kugel wurde gemessen und mit $r_0 = 37$ mm auf mm genau angegeben. Wie genau kennt man das Volumen?

Der Messfehler beträgt im ungünstigsten Fall $\Delta r = dr = \pm 0.5$ mm

Kugelvolumen: $V(r) = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$ $V'(r) = 4\pi r^2$

$V(r_0) = \frac{4\pi}{3} \cdot r_0^3 \approx 212.17$ (in cm^3)

Der durch den Messfehler verursachte Fehler des Volumens beträgt:

$$\Delta V \approx dV = V'(r_0) \cdot dr \approx \pm 4\pi \cdot 3.7^2 \cdot 0.05 \approx \pm 8.602$$

Der Radius der Kugel beträgt $r = 37 \pm 0.5$ mm, das Volumen $V = 212 \pm 9$ cm^3

Eine grössere Genauigkeit ist sinnlos.

Der relative Fehler beim Radius von 1.4% bewirkt einen etwa dreimal so grossen relativen Fehler des Volumens von 4.2%.

Analog zum Kreis ist die Volumenzunahme ΔV für kleine dr ungefähr gleich dem Differential dV . Da die Oberfläche O einer Kugel gleich $4\pi r^2$ ist, kann das Differential dV als Volumen eines Zylinders mit der Grundfläche $4\pi r^2$ und der Höhe dr aufgefasst werden.

3.3

Es sei L die Länge eines Metallstabs bei der Temperatur T . Steigt T um ΔT , so wächst L um ΔL

Es gilt: $\Delta L = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$ α heisst linearer Ausdehnungskoeffizient
(bei Messing ist z.B. $\alpha \approx 0.000018$ Grad^{-1}).

Für das Volumen eines Würfels mit Kante L gilt: $V(L) = L^3$ und $V'(L) = 3L^2$

Wächst die Kantenlänge des Stabes um ΔL , so wächst das Würfelvolumen um

$$\Delta V \approx dV = V'(L) \cdot dL = 3L^2 \cdot \alpha \cdot L \cdot \Delta T = L^3 \cdot 3\alpha \cdot \Delta T$$

Der räumliche Ausdehnungskoeffizient γ ist also etwa dreimal so gross wie der lineare α .

Allgemein gilt:

Wird eine Grösse mit n potenziert, so wird der relative Fehler ungefähr ver- n -facht.

3.4

Bei einer Sammellinse mit der Brennweite $f = 21$ cm misst man die Gegenstandsweite $g = 56$ cm ± 1.5 cm. Die Bildweite berechnet sich nach der Formel

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \text{ zu}$$

$$b(g) = \frac{fg}{g-f} \quad b'(g) = -\left(\frac{f}{g-f}\right)^2 \quad b'(56) = -0.36$$

absoluter Fehler: $\Delta b \approx \mp 0.36 \cdot 1.5$ cm

relativer Fehler: 1.6%

3.5

Für die Schwingungszeit T eines Pendels der Länge L gilt:

$$T(L) = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Zu gegebener Schwingungszeit kann mit der Umkehrfunktion Schwingungszeit T die Pendellänge L berechnet werden:

$$L(T) = \frac{g}{4\pi^2} \cdot T^2$$

Ein Zweisekundenpendel hat also die Länge $L(2) = 99.4 \text{ cm}$

Wie genau kann die Schwingungszeit für ein Pendel der Länge $L = 100 \text{ cm}$ angegeben werden?

Wegen $T'(L) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{L}} = \frac{\pi}{\sqrt{gL}}$ gilt:

$$\Delta T \approx dT = T'(L) dL = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{L}} dL = \frac{\pi}{\sqrt{gL}} dL \approx 0.0061 \text{ s.}$$

Der relative Fehler beträgt also ungefähr 0.3%.

3.6

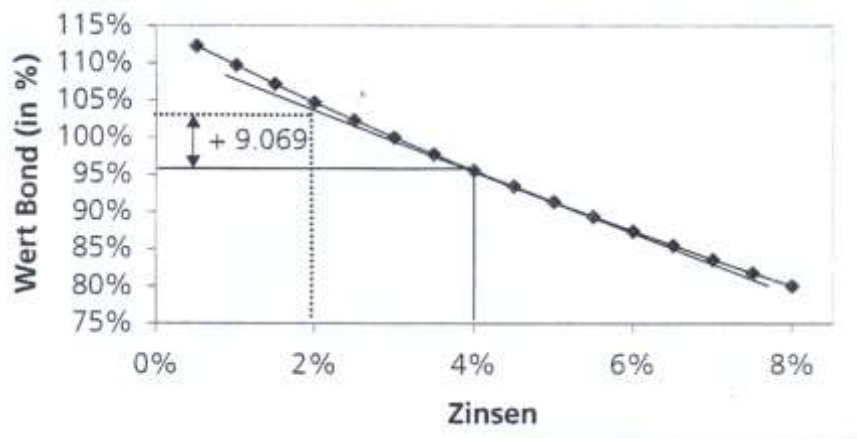
Welchen Zeitgewinn bringt auf einer Strecke von 250 Meilen eine Geschwindigkeitserhöhung von 55 mph auf 56 mph?

Es gilt: $t(v) = \frac{s}{v}$ $t'(v) = -\frac{s}{v^2}$

$$\Delta t \approx dt = -\frac{s}{v^2} \cdot dv \approx -4'52'' : \text{Zeitersparnis also etwa 5 Minuten auf 250 Meilen.}$$

3.7

In der Finanzwirtschaft werden Preisveränderungen oft durch Differentiale angenähert.



In der Grafik ist der Preis (Wert) eines bestimmten Bonds in Abhängigkeit von den Zinsen dargestellt. Sie drückt aus, dass bei einer Erhöhung der Zinsen der Wert der Obligation sinkt. Wir nehmen an, dass die 1. Ableitung bei einem Zinssatz von 4% ungefähr -4.53 beträgt (sogenannte Modified Duration).

Sinken die Zinsen um 200 Basispunkte, so wird sich der Bondpreis ungefähr folgendermassen verändern:

$$\Delta P \approx dP = -4.53 \cdot (-0.02) \approx 0.0906$$

Der Wert der Obligation wird sich als um ca. 9% erhöhen.

Hinweis:

Der Preis einer Option - das Optionsdelta - ist der Wert der 1. Ableitung