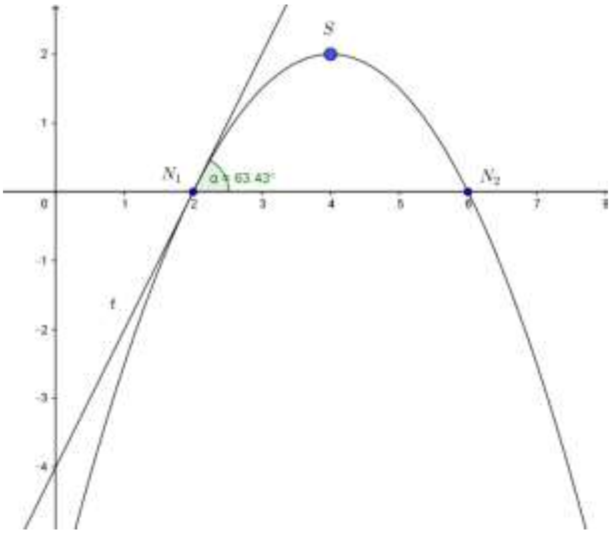
5. Einige geometrische Anwendungen

1. Stellen mit vorgegebener Tangentensteigung, horizontale Tangenten

Aufgabe:
Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung
$p: y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$.



a)
Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt S der Parabel?

An den Stellen mit horizontaler Tangente, verschwindet die 1. Ableitung
$f'(x) = 4 - x = 0 \qquad x_S = 4$
$y_S = f(x_S) = 2 \qquad S(4,2)$

b)
An welchen Stellen schneidet die Parabel die x-Achse?

Gesucht sind die x-Werte, für die $f(x) = 0$ gilt.
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2 - 8x + 12\right) = -\frac{1}{2}\cdot(x-6)\cdot(x-2) = 0$
$x_1 = 6$ bzw. $x_2 = 2$
Variante: quadratische Auflösungsformel

Bemerkung:
Verwendet man noch die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse Y(0, -6), dann kann die Parabel mit diesen Punkten und der Symmetrieeigenschaft gut gezeichnet werden.

c)
Gesucht ist eine Gleichung der Tangente im Parabelpunkt $N_1(2,0)$.

Die Tangentensteigung ergibt sich mit der 1. Ableitung.
$m_1 = f'(2) = 2$
Ansatz für die Tangente
t_1: $y = 2x + q$
q ergibt sich aus der Bedingung, dass die Koordinaten von $N_2(2, 0)$ die Tangentengleichung erfüllen:
t_1: $y = 2x - 4$
Wegen $m = \tan\alpha$ schneidet die Parabel die x-Achse in S_1 unter dem Winkel
$\alpha = \arctan(2) = 63.4°$

d)
An welcher Stelle ist die Parabeltangente parallel zur Geraden g: 2x - 3y - 6 = 0 ?
Die Steigung der Geraden g ergibt sich aus der expliziten Form der Geradengleichung
$y = \frac{2}{3}x - 2$ zu $m = \frac{2}{3}$
Gesucht ist die Stelle x, für die gilt: $f'(x) = 4 - x = \frac{2}{3} \qquad x = \frac{10}{3}$

2. Zwei Kurven berühren sich

Es ist zu unterscheiden:

Zwei Kurven schneiden sich
gleiche Funktionswerte

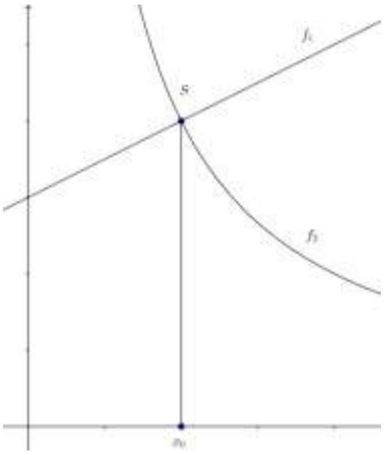
$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$
$$f_1'(x_0) \neq f_2'(x_0)$$

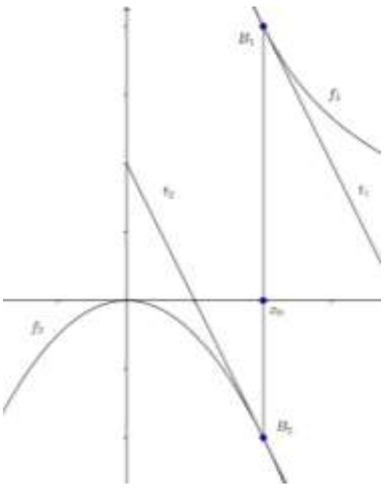
gleiche Steigung

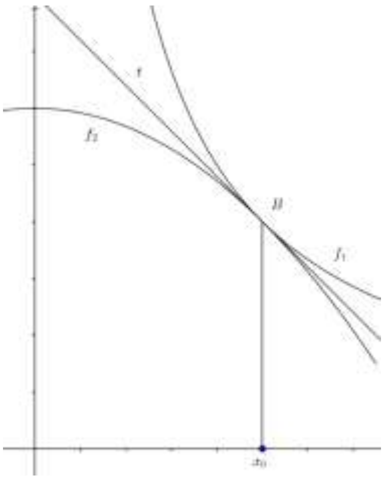
$$f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$$
$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$$

zwei Kurven berühren sich
gleiche Funktionswerte und
gleiche Steigung

$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$
$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0)$$







Aufgabe:
Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2$ ist so in y-Richtung zu verschieben, dass sie die Hyperbel mit der Gleichung $y = \frac{2}{x}$ berührt.

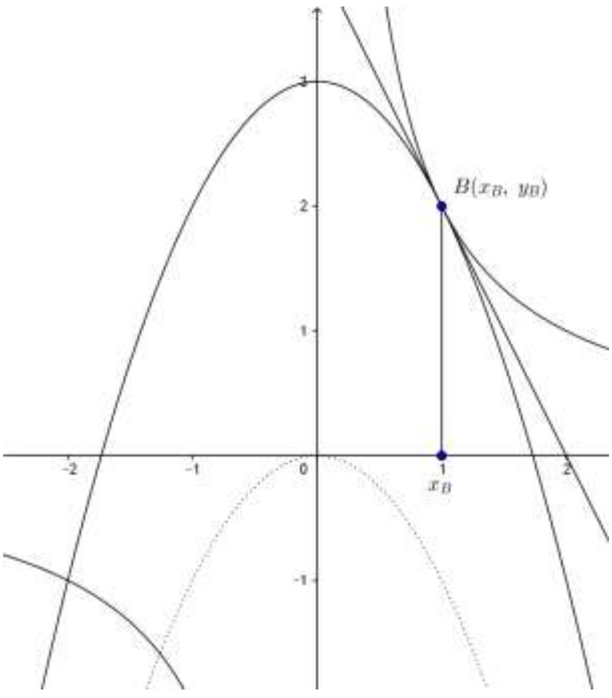
Ansatz für die Gleichung der verschobenen Parabel:
$y = c - x^2$.
An der Berührstelle x_B stimmen die Funktionswerte überein:

$$\frac{2}{x_B} = c - x_B^2 \qquad (1)$$

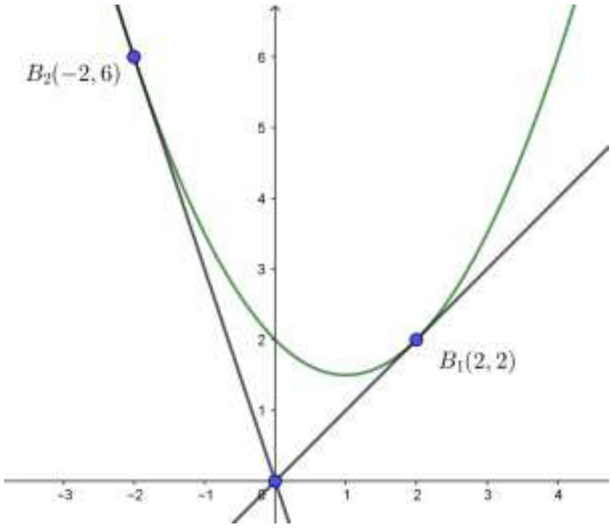
und die 1. Ableitungen

$$-\frac{2}{x_B^2} = -2x_B \qquad (2)$$

Aus (2) folgt $x_B^3 = 1$ und damit $x_B = 1$
eingesetzt in (1) ergibt
$c = 3$
Koordinaten des Berührungspunkts $B(1,2)$.



Aufgabe:
Vom Punkt A(0, 0) aus sind die Tangenten an die Parabel mit der Gleichung
$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ zu legen.



$f'(x) = x - 1$
Scheitelkoordinaten $S\left(1, \frac{3}{2}\right)$

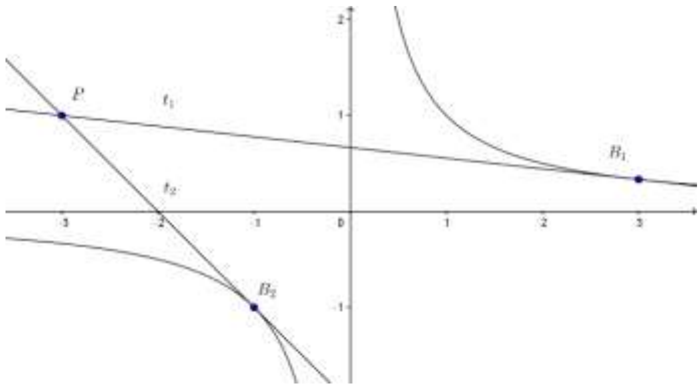
Ansatz für die Gleichung der Tangente:
$y = mx$

Im Berührungspunkt stimmen überein
- die Funktionswerte
  $mx_B^2 = \frac{1}{2}x_B^2 - x_B + 2$ (1)
- die 1. Ableitungen
  $m = x_B - 1$ (2)

eingesetzt in (1)
$\left(x_B - 1\right) \cdot x_B = \frac{1}{2}x_B^2 - x_B + 2$
mit 2 multiplizieren und vereinfachen $x_B^2 = 4$

1. Lösung:	$B_1(2, 2)$	$m_1 = 1$
2. Lösung:	$B_2(-2, 6)$	$m_2 = -3$

Übungsaufgaben:
a)
Vom Punkt P(0, -9) aus sind die Tangenten an die Parabel $y = x^2 - 4x$ zu legen.
$\frac{x^2 - 4x + 9}{x} = 2x - 4$ $B_1(3, -3)$ und $B_2(-3, 21)$
b)
Vom Punkt P(-3, 1) aus sind die Tangenten an die Hyperbel mit der Gleichung
$y = \frac{1}{x}$ zu legen.
Die Steigung kann auf zwei verschiedene Arten berechnet werden:
- aus der Steigung der Strecke PB:
  $\frac{\frac{1}{x_B} - 1}{x_B + 3}$
- aus der 1. Ableitung an der Stelle x_B
  $-\frac{1}{x_B^2}$



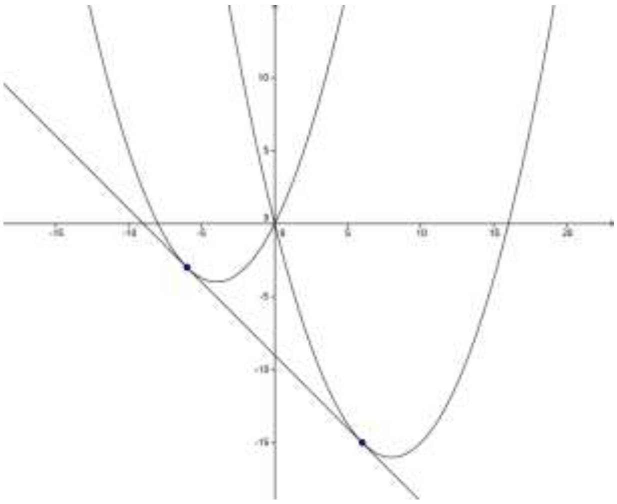
Gleichsetzen führt auf: $\frac{\frac{1}{x_B} - 1}{x_B + 3} = -\frac{1}{x_B^2}$

$x_B = 3$ $y_B = \frac{1}{3}$ $B_1\left(3, \frac{1}{3}\right)$ t_1: $y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{3}$.
$x_B = -1$ $y_B = -1$ $B_1(-1, -1)$ t_2: $y = -x - 1$

c)
Die Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = 3x^2 - 2x$ wird in y-Richtung verschoben, bis sie die x-Achse berührt. Wie heisst die Gleichung der verschobenen Parabel?

Lösung:
$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$

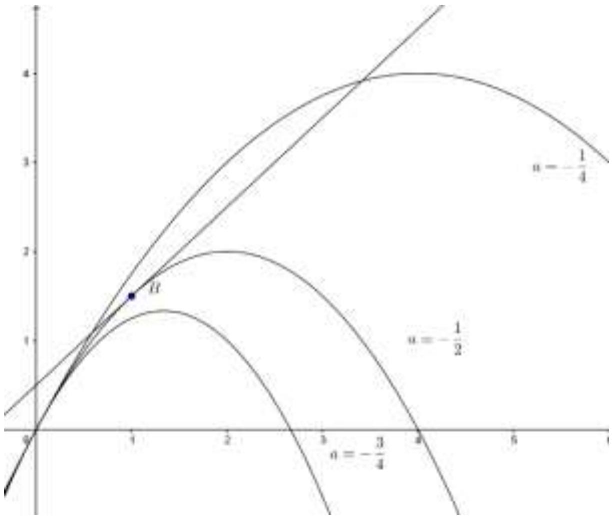
d)
Der Parameter b ist so zu bestimmen, dass die Gerade g: $y = -x - 9$ Tangente an die Parabel p: $y = \frac{1}{4}x^2 + bx$ ist.



Lösung:
$b = 2$ $\quad B(-6, -3)$ oder
$b = -4$ $\quad B(6, -15)$

Variante:
Lösung mit der Diskriminantenmethode

e)
Für welchen Wert des Parameters a ist die Gerade g: $y = x + \frac{1}{2}$ Tangente an die Parabel p: $y = ax^2 + 2x$?.



Lösung:
$a = -\frac{1}{2}$
Berührungspunkt $B(1, \frac{3}{2})$

Variante:
Lösung mit der Diskriminantenmethode:

$D = 1 + 2a = 0$

In der Skizze sind die drei Fälle dargestellt

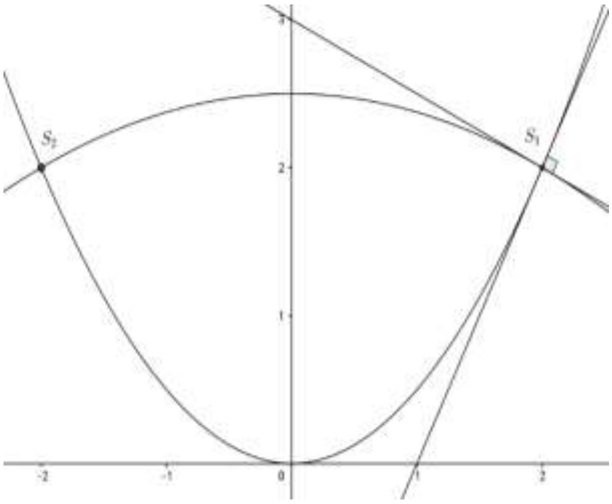
3. Zwei Kurven schneiden sich unter einem rechten Winkel

Im Schnittpunkt S

- stimmen die Funktionswerte überein $f_1(x_S) = f_2(x_S)$
- ist das Produkt der 1. Ableitungen gleich -1 $f_1'(x_S) \cdot f_2'(x_S) = -1$

Aufgabe:
Die Parabel $y = -\frac{1}{8}x^2$ ist so in y-Richtung zu verschieben, dass sie die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2$ senkrecht schneidet.

gleiche Funktionswerte:
$\frac{1}{2}x_S^2 = -\frac{1}{8}x_S^2 + c$ (1)
Produkt der Ableitungen
$x_S \cdot \left(-\frac{x_S}{4}\right) = -1$ (2)
Aus (2) folgt $x_S^2 = 4$ und schliesslich $x_S = \pm 2$ .Mit (1) erhält man $c = \frac{5}{2}$ und die Koordinaten der beiden Schnittpunkte $S_{1,2}(\pm 2, 2)$

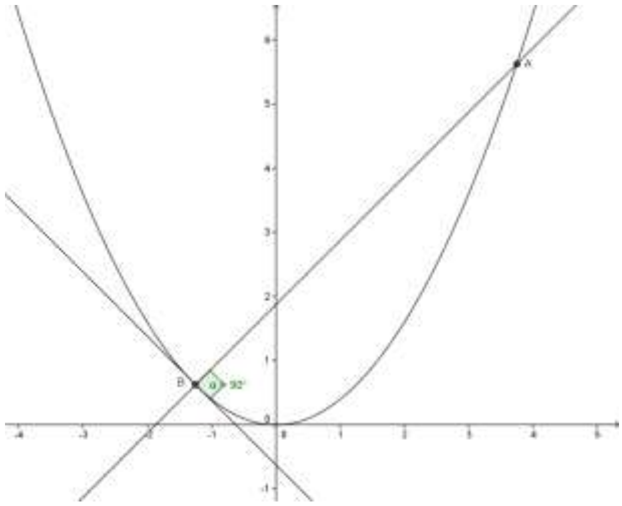


Übungsaufgaben:
a)
Die 1. Winkelhalbierende ist so in y-Richtung zu verschieben, dass sie die Parabel mit der Gleichung $y = \frac{2}{5}x^2$ senkrecht schneidet.

Ansatz für die Gleichung der verschobenen Geraden:
$y = x + q$
Im Schnittpunkt gilt:

- die Funktionswerte sind gleich
  $x_S + q = \frac{2}{5}x_S^2$ (1)
- Produkt der Steigungen
  $1 \cdot \left(\frac{4}{5}x_S\right) = -1$
  $x_S = -\frac{5}{4}$

eingesetzt in (1) $q = \frac{15}{8}$
Gleichung der verschobenen Geraden:
$y = x + \frac{15}{8}$



b)
Welche Gerade durch den Nullpunkt schneidet die Parabel mit der Gleichung $y = 4 - x^2$ in einem rechten Winkel?

Lösung: $y = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \cdot x$

4. Schnittwinkel zweier Kurven

Der nicht stumpfe Schnittwinkel zweier Kurven wird von den Tangenten im Schnittpunkt eingeschlossen.

Aufgabe:

Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven

k_1: $y = f(x) = \frac{1}{8}x^2$ und k_2: $y = g(x) = \dfrac{1}{x}$

Im Schnittpunkt stimmen die Funktionswerte überein:

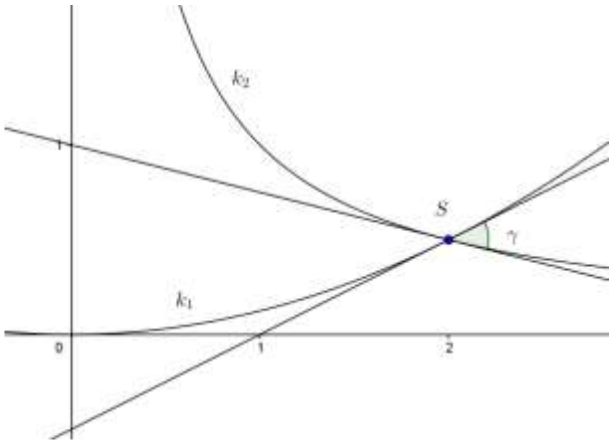
$\frac{1}{8}x^2 = \dfrac{1}{x}$ oder $x = 2$

Wegen $f'(x) = \frac{1}{4}x$ bzw. $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

gilt für die Tangentensteigungen der beiden Kurven im Schnittpunkt $S(2, \frac{1}{2})$:

$m_1 = f'(2) = \dfrac{1}{2}$ bzw.

$m_2 = g'(2) = -\dfrac{1}{4}$



Der Zwischenwinkel kann mit der Zwischenwinkelformel direkt bestimmt werden:

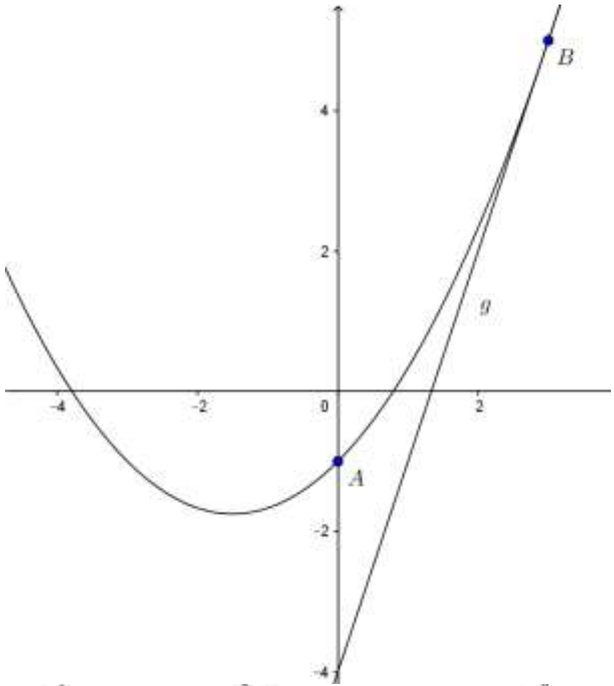
$$\tan\gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2}{3} \qquad \gamma = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 40.6°$$

Übungsaufgabe:
Unter welchem spitzen Winkel schneidet die Gerade g: $y = 2x - 3$ die Parabel p: $y = x^2$?

Lösung:
Im Schnittpunkt S(-1,1) ist der Schnittwinkel: $\gamma_1 = 53.13°$
Im Schnittpunkt S(3,9) ist der Schnittwinkel: $\gamma_2 = 17.10°$

5. vorgegebene Eigenschaften:

Aufgabe:
Eine quadratische Parabel schneidet die y-Achse in A(0,-1) und berührt die Gerade g: $y = 3x - 4$ an der Stelle x = 3. Wie heisst ihre Gleichung



Die fehlende y-Koordinate des Berührungspunktes B und die Tangentensteigung in B ergeben sich aus der Gleichung der Tangente g zu $y = 5$ und $m = 3$.

Ansatz für die Parabelgleichung:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$

$f(0) = c = -1$

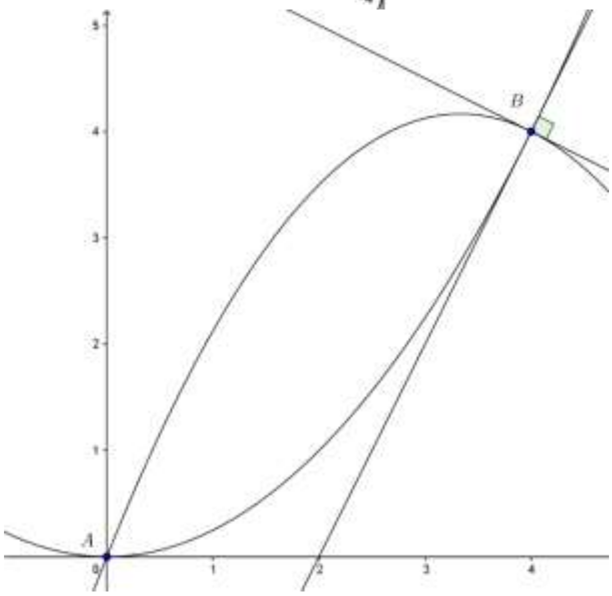
$f(3) = 5 \qquad 9a + 3b - 1 = 5$

$f'(3) = 3 \qquad 6a + b = 3$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen $a = \frac{1}{3}$ und $b = 1$

Gesuchte Parabelgleichung: $y = \frac{1}{3}x^2 + x - 1$

Übungsaufgaben:
a)
Welche quadratische Parabel durch A(0/0) schneidet die Parabel mit der Gleichung $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$ in B(4/?) rechtwinklig?



Ansatz für die Gleichung der gesuchten Parabel:

$y = g(x) = ax^2 + bx$

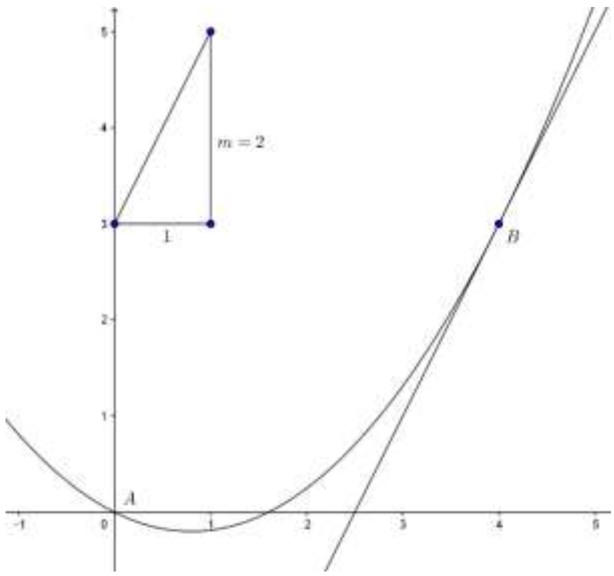
$f(4) = g(4) \qquad 16a + 4b = 4$

$f'(4) \cdot g'(4) = -1 \qquad 2 \cdot (8a + b) = -1 .$

Lösung: $y = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{2}x$

b)
Eine quadratische Parabel geht durch die Punkte A(0,0) und B(4,3). Die Tangente in B ist zur Geraden g: $2x - y + 3 = 0$ parallel Wie heisst die Parabelgleichung?

Ansatz für die Parabelgleichung:
$y = f(x) = ax^2 + bx + c$
A(0,0) ist Parabelpunkt:
$f(0) = 0 \qquad c = 0$
B(4,3): ist Parabelpunkt:
$f(4) = 3 \qquad 16a + 4b = 3 \quad (1)$
Die Gerade g hat die
Steigung $m = 2$
$f'(4) = 2 \qquad 8a + b = 2 \quad (2)$



Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ll} 16a + 4b & = 3 \\ 8a + b & = 2 \end{array} \right| \cdot (-4)$$

$a = \frac{5}{16} \qquad b = -\frac{1}{2}$
Gesuchte Parabelgleichung
$y = f(x) = \frac{5}{16}x^2 - \frac{1}{2}x$.