Das Zusammensetzen (Verketten, Hintereinanderausführen) von Funktionen

Die bisherigen Regeln sagen aus, wie man Summen, Produkte, Quotienten von Funktionen ableitet.

Beispiele:

$\left(x^2 \pm e^x\right)' = 2x \pm e^x \quad \left(x^2 \cdot e^x\right)' = \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^x \quad \left(x^2 \cdot e^x\right)' = \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^x$

$\left(e^{x^2}\right)' = ?$

Funktionen können aber auch hintereinander ausgeführt (zusammengesetzt, verkettet, verknüpft) werden. Die Kettenregel macht eine Aussage über die Ableitung von verketteten Funktionen.

Einführende Beispiele:

g: Quadratfunktion f: Cosinusfunktion

1.
Die Berechnungen erfordern einen Taschenrechner (TR)

Eingabe x		Zwischenresultat u		Ausgabe y
0.6	$\xrightarrow{quadrieren}$	0.36	$\xrightarrow{cos}$	0.9359
		$g(0.6) = 0.36$		$f(0.36) = f(g(0.6)) = 0.9359$
0.6	$\xrightarrow{\cos}$	0.8253	$\xrightarrow{quadrieren}$	0.6812
		$f(0.6) = 0.8253$		$g(0.8253) = g(f(0.6)) = 0.6812$

2.
g: verdoppeln und 1 addieren f: Exponentialfunktion zur Basis e

$x \xrightarrow{g} u = g(x) \xrightarrow{f} f(u) = f(g(x))$

0.5 0.25 1.29

$x \xrightarrow{f} u = f(x) \xrightarrow{g} g(u) = g(f(x))$

0.5 1.65 2.72

Die beiden Beispiele zeigen, dass i.a. das Verketten von der Reihenfolge anhängt.

Definition:
Die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = f(g(x))$ heisst Zusammensetzung der Funktionen f und g ("f von g von x"). g heisst innere, f äussere Funktion

$x \xrightarrow{g} u = g(x) \xrightarrow{f} f(u) = f(g(x))$

$F(x) = f(g(x))$ ist für alle x definiert, für welche g(x) definiert ist. g(x) muss im Definitionsbereich von f liegen.

Dazu ein Beispiel:

Eingabe x		Zwischenresultat u		Ausgabe y
x	$\xrightarrow{\cos}$	$u = g(0.6)$	$\xrightarrow{\sqrt{\ }}$	$f(u) = f(g(0.6))$
2	-	- 0.4161		error

Übungsaufgabe:
Gegeben sind die Funktionen
g: $x \rightarrow 2x + 1$ verdoppeln und 1 addieren und
f: $x \rightarrow x^3$. in die 3.Potenz setzen
Gesucht sind $f(g(x))$ und $g(f(x))$.

Lösung: $f(g(x)) = (2x+1)^3$ $g(f(x)) = 2x^3 + 1$

Bei der Anwendung der Kettenregel geht es darum, eine "komplizierte" Funktion aus "einfacheren" zusammenzusetzen.

Beispiele:
1.
$F(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist zusammengesetzt aus den Funktionen
$u = g(x) = -\frac{x^2}{2}$ und $f(u) = e^u$ $F(x) = f(g(x)) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
2.
$F(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist zusammengesetzt aus den Funktionen
$u = g(x) = 1 - x^2$ und $v = f(u) = \sqrt{u}$ $F(x) = f(g(x)) = \sqrt{1 - x^2}$

F(x) ist definiert für alle x mit $-1 \leq x \leq 1$

Analog lassen sich auch mehr als zwei Funktionen zusammensetzen:
$F(x) = \sin^2(\omega t)$ ist aus den Funktionen
$u = g(x) = \omega \cdot t$ $v = h(u) = \sin u$ und $y = k(v) = v^2$ zusammengesetzt
womit gilt: $F(x) = k(h(g(x)))$

Eine aufwendigere Übungsaufgabe (fakultativ)
:
Es sind die 36 möglichen Verknüpfungen der folgenden Funktionen in einer Tabelle darzustellen:

$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = 1 - x \quad f_4(x) = \frac{x}{x-1} \quad f_5(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_6(x) = 1 - \frac{1}{x}$

Bemerkung:
Für die Verknüpfung wird üblicherweise das Zeichen ° verwendet.

$$(f_2 \circ f_5)(x) = f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1 - x = f_3(\mathrm{x})$$

°	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	6	1	5	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	4	2	3	6	1
6	6	3	4	2	1	5

Es ist bemerkenswert, dass jede der 36 möglichen Verknüpfungen wieder eine der 6 gegebenen Funktionen ergibt. Man sagt, die 6 Funktionen bilden bezüglich der Verknüpfung eine so genannte Gruppe.

Einführendes Beispiel zur Kettenregel:

Wir untersuchen an einem einfachen Beispiel wie die 1. Ableitung einer zusammengesetzten Funktion mit den Ableitungen von innerer und äusserer Funktion zusammenhängt.

$F(x) = (x^3 - 1)^2$ $\qquad$ $F'(x) = (x^6 - 2x^3 + 1)' = 6x^5 - 6x^2 = 2 \cdot (x^3 - 1) \cdot 3x^2$

$g : x \to u = x^3 + 1$ $\qquad$ $\frac{du}{dx} = g'(x) = 3x^2$ $\qquad$ “innere Ableitung”

$f : u \to y = u^2$ $\qquad$ $\frac{dy}{du} = f'(u) = 2u$ $\qquad$ “äussere Ableitung”

$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \cdot (x^3 + 1) \cdot 3x^2$

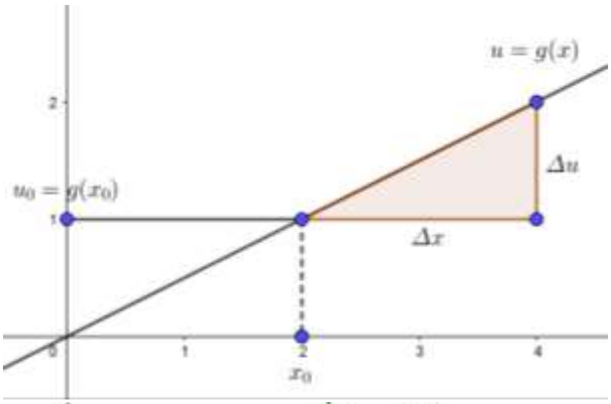
In diesem Beispiel ist die Ableitung der zusammengesetzten Funktion gleich dem Produkt aus der Ableitung der inneren Funktion und der Ableitung der äusseren Funktion. Diese Regel gilt allgemein und heisst Kettenregel.

Zur Vorbereitung des Beweises der Kettenregel:

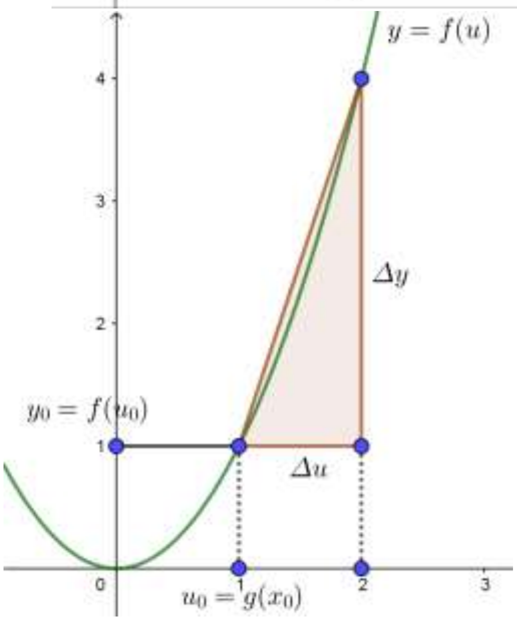
$g: x \to u = \frac{1}{2}x$ $\qquad \frac{du}{dx} = g'(x) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ “innere Ableitung”

$f: u \to y = u^2$ $\qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = 2u$ $\qquad$ “äussere Ableitung”

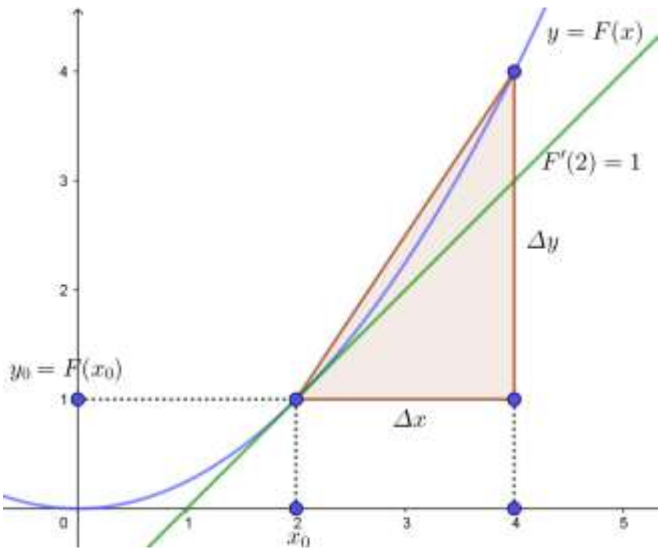
$F(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4}x^2$ $\qquad F'(x) = \frac{1}{2}x$



$g'(x_0) = \frac{1}{2}$



$f'(u_0) = 2u_0$



$F'(x_0) = 2u_0 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}x_0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x_0$

1. Beweis der Kettenregel (sofern $\Delta u \neq 0$)

Aus der Gleichung der Sekantensteigungen

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta u} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$ folgt durch Grenzübergang

$$\frac{du}{dx} \qquad \frac{dy}{du} \qquad \frac{dy}{dx}$$

$$F'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g(x_0) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Kettenregel (1. Formulierung):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Die Ableitung einer zusammengesetzten Funktion ist gleich dem Produkt aus der "äusseren" und der "inneren" Ableitung".

Kettenregel (2. Formulierung):

Ist g an der Stelle x_0 und f an der Stelle $u_0 = g\left(x_0\right)$ differenzierbar, so ist auch die zusammengesetzte Funktion F mit der Gleichung $F\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right)$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt:

$$F'\left(x_0\right) = f'\left(u_0\right) \cdot g'\left(x_0\right) = f'\left(g\left(x_0\right)\right) \cdot g'\left(x_0\right)$$

2. Beweis mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (fakultativ).

Wir setzen zusätzlich voraus, dass die innere Funktion g in einer Umgebung U_1 von x_0 und die äussere Funktion f in einer Umgebung U_2 von $g(x_0)$ differenzierbar sind und dass zudem g an der Stelle x_0 und f an der Stelle $u_0 = g(x_0)$ stetig differenzierbar sind (d.h. dass die Ableitungen an diesen Stellen stetig sind).

Die Kettenregel lässt sich nun mit dem Mittelwertsatz beweisen:
Für $x \in U_1$ gibt es ein x_1 zwischen x_0 und x mit
$\Delta u = g'(x_1) \cdot \Delta x$ und
für $u \in U_2$ gibt es ein u_2 zwischen $u_0 = g(x_0)$ und u mit
$\Delta y = f'(u_2) \cdot \Delta u$. Also gilt:
$\Delta y = f'(u_2) \cdot \Delta u = f'(u_2) \cdot g'(x_1) \cdot \Delta x$ und nach Grenzübergang

$$F'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f'(u_2) g'(x_1) = f'(u_0) g'(x_0) .$$

Beispiele:

1.

$$\left(\sin\left(3x\right)\right)' = \cos\left(3x\right)\cdot 3$$

g: $x \rightarrow u = x^2$ innere Funktion $\frac{du}{dx} = 3x$ innere Ableitung (u nach x ableiten)

f: $u \rightarrow y = \sin u$ äussere Funktion $\frac{dy}{du} = \cos u$ äussere Ableitung (y nach u ableiten)

2.

$$\left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x\cdot\cos x$$

3.

$$\left(\sin\left(x^3\right)\right)' = \cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2$$

4.

$$\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)' = \frac{2x}{1+x^2}$$

Im Zähler steht die Ableitung des Nenners

5.

$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

Geometrische Interpretation: die Kreistangente steht auf dem Berührungsradius senkrecht

6.

$$\left(\tfrac{1}{3}\cdot\left(\cos^3 x - 3\cos x\right)\right)' = \sin^3 x$$

7. Idee: Basis 2 auf Basis e zurückführen

$$\left(2^x\right)' = \left(\left(e^{\ln 2}\right)^x\right)' = \left(e^{\ln 2\cdot x}\right)' = \ln 2\cdot e^{\ln 2\cdot x} = \ln 2\cdot 2^x$$

Allgemein:

.$\left(a^x\right)' = \ln a\cdot a^x$ $a \neq 1,\ a > 0$ Ableitung der Exponentialfunktion

Zu unterscheiden:

x^a: Potenzfunktion die Basis ist variabel, der Exponent ist ein gegebener Parameter

a^x: Exponentialfunktion die Basis ist ein gegebener Parameter, der Exponent ist variabel

b)
Mit zunehmender Routine wird man in einfachen Fällen die Kettenregel direkt anwenden:

1. $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\sin(2x))' = \cos(2x)\cdot 2$

2. $(e^x)' = e^x$ $\qquad (e^{-x})' = e^{-x}\cdot(-1)$

3. $(x^{10})' = 10x^9$ $\qquad ((3x-2)^{10})' = 10\cdot(3x-2)^9\cdot 3$

4. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (\sqrt{4x-3})' = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{4x-3}}\cdot 4 = \dfrac{2}{\sqrt{4x-3}}$

5. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\qquad (\ln(a-x))' = -\dfrac{1}{a-x} = \dfrac{1}{x-a}$

c)
Verkettung mit mehr als 2 Funktionen

1. $\left(\ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right)' = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot\dfrac{1}{\tan u} = \dfrac{1}{2\sin u\cos u} = \dfrac{1}{\sin(2u)} = \dfrac{1}{\sin x}$ mit $u = \dfrac{x}{2}$

2. $(\sin^2(\omega t))' = 2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \omega\sin(2\omega t)$

d)
In den folgenden Beispielen wird die Kettenregel mit der Produkt- bzw. der Quotientenregel kombiniert.

1. $\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)'' = \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\qquad$ Gaussverteilung, Normalverteilung

2. $(x^2\cdot e^{-x})' = e^{-x}\cdot(2x-x^2)$ $\qquad$ auch mit der Quotientenregel

3. $(x\sqrt{3-x})' = \dfrac{6-3x}{\sqrt{3-x}} = \dfrac{3\cdot(2-x)}{\sqrt{3-x}}$

4. $(x^x)' = (e^{x\cdot\ln x})' = e^{x\cdot\ln x}\cdot(\ln x+1) = x^x\cdot(\ln x+1)$

e)
Bei der Ableitung von Logarithmusfunktionen können die Logarithmengesetze eine Vereinfachung bringen:

1. $\left(\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)' = \left(\tfrac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))\right)' = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Im folgenden Beispiel wird die Kettenregel mit der Summenregel kombiniert:

2. $\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Übungsaufgaben zur Kettenregel:

1.
$\left(2^{3x}\right)' = ?$
2.
$\left(3^{\cos x}\right)' = ?$
3.
$\left(\left(2x-4\right)\cdot e^{\frac{x}{2}}\right)' = ?$

Repetitionsaufgaben zu den Ableitungsregeln:
Gesucht sind die Ableitungen der folgenden Funktionen:
1.
$\left(x^2 - 2e^2\right)'$

2. $\left(x^2 + e^x\right)'$

3. $\left(x^2 \cdot e^x\right)'$

4. $\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)'$

5. $\left(e^{-x^2}\right)'$

6. $\left(x^2 \cdot e^{-x}\right)'$

Lösungen der Übungsaufgaben:
1. $3\ 2^{3x} \ln(2)$ 2. $-3^{\cos(x)} \sin(x) \ln(3)$ 3. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\ x$

Lösungen der Repetitionsaufgaben:
1. $2x$ 2. $2x + e^x$ 3. $e^x \cdot x \cdot (x+2)$3.   4. -$e^x \cdot x \cdot (x-2)$ 5. $-2x \cdot e^{-x^2}$ 6. wie 4.

Ergänzung: Ableitung von impliziten Funktionen (fakultativ)

explizite Funktion: $y = \sqrt{x}$ implizite Funktion: $y^2 = x$

Statt die Ableitung aus der expliziten Gleichung zu bestimmen, kann auch die implizite Gleichung nach der Kettenregel abgeleitet werden.

Beispiele:

1. Wurzelfunktion $y^2 = x$ $\quad 2y \cdot y' = 1 \quad y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

2. $ax + by + c = 0$ $\quad a + by' = 0 \quad y' = -\frac{a}{b}$

3. $\left(x^x\right)' = ?$

$y = x^x$ logarithmiert

$\ln y = x \cdot \ln x$ $\quad \frac{y'}{y} = \ln x + 1 \quad y' = y\left(\ln x + 1\right)$

$$\left(x^x\right)' = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

4. Kreisgleichung

$x^2 + y^2 = r^2$ $\quad 2x + 2y \cdot y' = 0 \quad y' = -\frac{x}{y}$

geometrische Interpretation: Die Tangente steht auf dem Berührradius senkrecht.

5. Ellipsengleichung

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $\quad 2b^2x + 2a^2y \cdot y' = 0 \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$

6. $\left(\arctan x\right)' = ?$

$y = \arctan x \leftrightarrow x = \tan y$ $\quad 1 = \left(\tan y\right)' \cdot y'$

$$y' = \frac{1}{\left(\tan y\right)'} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

7. $\left(\arcsin x\right)' = ?$

$y = \arcsin x \leftrightarrow x = \sin y \quad 1 = \cos y \cdot y'$ $\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos\left(\arcsin x\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\boxed{\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Die Ableitungsregel für die Umkehrfunktion wird im Kapitel Analysis 2 behandelt.