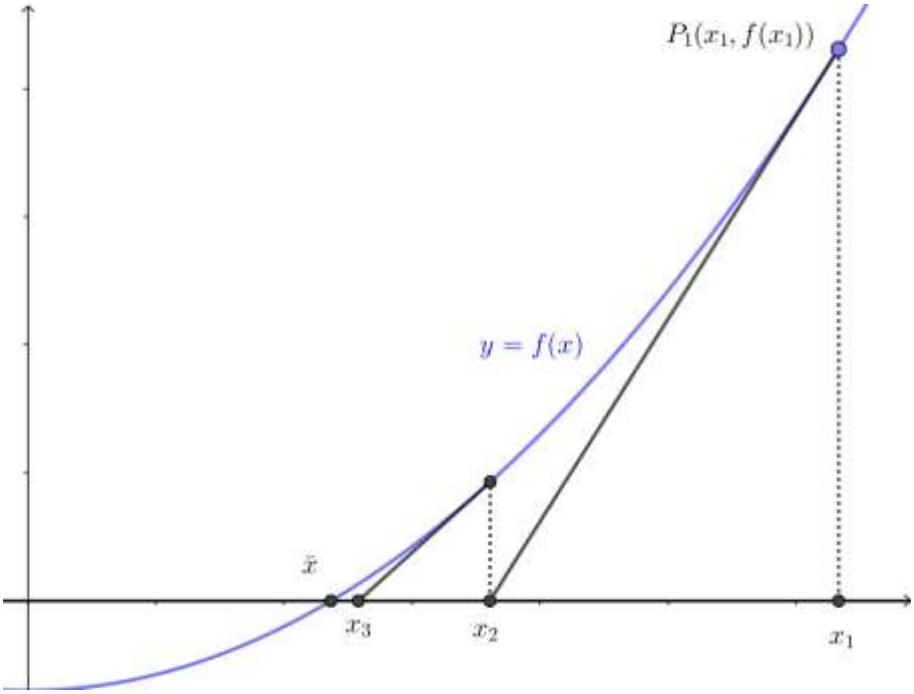
7. Eine Anwendung: Das Newtonverfahren

Das Newtonverfahren ist ein Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen der Form $f(x) = 0$, wobei f eine im Intervall $I = [a, b]$ differenzierbare Funktion sein soll.



Geometrische Idee:

1. Zunächst ist ein Intervall I zu suchen, in dem f das Vorzeichen wechselt.
   Da f differenzierbar ist, ist f auch stetig. Damit liegt in I auch eine Nullstelle.
2. In I wird eine erste Näherungslösung x_1 gewählt.
3. Die Kurve $y = f(x)$ wird an der Stelle x_1 durch die Tangente t ersetzt.
   Die x-Koordinate des Schnittpunkts von t mit der x-Achse liefert die nächste Näherungslösung.
4. 3. wird wiederholt, bis die Abbruchbedingung erfüllt ist.

Rechnerische Durchführung der Idee:

Die Steigung der Tangente in P_1 wird auf zwei Arten berechnet:

$f'(x_1)$ als Wert der 1. Ableitung in P_1

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$ als Steigung der Strecke x_2P_1

$f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$ Gleichsetzen und mit Nenner multiplizieren

$(x_1 - x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1)$ $\qquad$ $x_1 - x_2 = \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ mit (-1) multiplizieren

$-x_1 + x_2 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ nächste Näherungslösung

Newtonverfahren

Man wählt eine erste Näherungslösung x_1. Die weiteren Näherungslösungen ergeben sich daraus mit der Rekursionsformel:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bemerkung:
Das Verfahren konvergiert aber nicht in jedem Fall. Probleme ergeben sich etwa, wenn der Graph von f im betrachteten Intervall (fast) eine horizontale Tangente oder einen Wendepunkt hat (vgl. dazu den Satz in FuT).
In den meisten Fällen verdoppelt sich aber bei jedem Schritt ungefähr die Anzahl der richtigen Stellen (Näheres dazu im Kapitel Analysis 2 (Numerische Verfahren).

Beispiele:

Lösen einer Gleichung 3. Grades
Die Gleichung $x^3 = 1 - x$ wird zunächst auf die Normalform $f(x) = x^3 + x - 1$ gebracht.
Die Funktion wechselt im Intervall $I = [0, 1]$ das Vorzeichen. Da die 1. Ableitung $f'(x) = 3x^2 + 1$ positiv ist, existiert genau eine reelle Nullstelle.
Startwert: $x_1 = 1$

Newtonverfahren

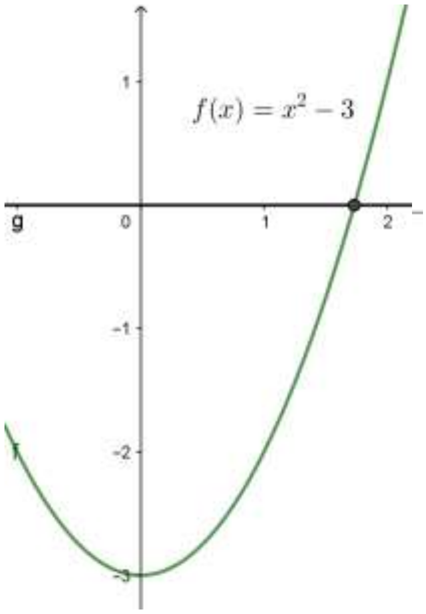
$f(x) = x^3 + x + 1$ $\qquad$ $f'(x) = 3x^2 + 1$

n	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	x_n+1
0	1.00000000000	1.00000000000	4.00000000000	0.75000000000
1	0.75000000000	0.17187500000	2.68750000000	0.68604651163
2	0.68604651163	0.00894103664	2.41197944835	0.68233958260
3	0.68233958260	0.00002823062	2.39676191794	0.68232780395
	0.68232780395	0.00000000028	2.39671369612	0.68232780383
	0.68232780383	0.00000000000	2.39671369563	0.68232780383

Lösung: 0.68232780383…nach drei Schritten bereits auf 9 Stellen genau.

Algorithmus von Heron zur Bestimmung von Quadratwurzeln (≈ 65 – ≈ 125 n. Chr.)

Die Quadratwurzel ist eine Nullstelle der Funktion f mit der Gleichung:
$f(x) = x^2 - a,\ a \in R^+$



Als geeigneten Startwert verwendet man $x_1 = \frac{1}{2} \cdot (a+1)$

Rekursionsformel: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$

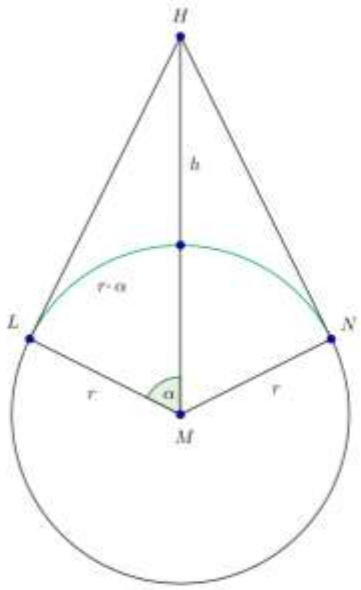
Heron

a= 3

n	x_n	a/x_n)	x_n+1	
0	2.00000000000	1.50000000000	1.75000000000	1.7000000000 2 Stellen genau
1	1.75000000000	1.71428571429	1.73214285714	1.7320000000 4 Stellen genau
2	1.73214285714	1.73195876289	1.73205081001	1.7320508000 8 Stellen genau
3	1.73205081001	1.73205080512	1.73205080757	
4	1.73205080757	1.73205080757	1.73205080757	

Die „aufgehängte Erdkugel“

Um die als ideale Kugel gedachte Erde wird ein Seil gelegt. Wie hoch hängt es über der Erde, wenn man es um einen Meter verlängert und im Punkt H „aufhängt“.



Dreieck HLM:

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h}$$ nach h aufgelöst:

$$h = r\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \qquad (1)$$

Der Streckenzug LHN ist um einen Meter länger als die Länge des grün gefärbten Bogens LN.

$$\overline{LH} = r\cdot\alpha + \tfrac{1}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{LH}}{r} = \frac{r\cdot\alpha+\tfrac{1}{2}}{r} = \alpha + \frac{1}{2r} = \alpha + \varepsilon$$

$\tan\alpha = \alpha + \varepsilon$ mit

$$\varepsilon = \frac{1}{2r}$$

Die gesuchte Höhe ergibt sich mit 1) zu $h \approx 121.5\ m$

"Die aufgehängte Erdkugel"				
Erdradius	6377400	Meter		
Seilverlängeru	1	Meter		
	7.84019E-08			
		f(α)= α - tan(α)+ε	f'(α) = 1-1/cos²(α)	
n	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	x_n+1
1	0.050000000000	-0.000041629974	-0.002504172577	0.033375756902
2	0.033375756902	-0.000012319999	-0.001114768915	0.022324140037
3	0.022324140037	-0.000003630878	-0.000498532855	0.015041014214
4	0.015041014214	-0.000001055954	-0.000226266234	0.010374147967
5	0.010374147967	-0.000000293780	-0.000107630668	0.007644632061
6	0.007644632061	-0.000000070520	-0.000058442676	0.006437978305
7	0.006437978305	-0.000000010546	-0.000041448710	0.006183548381
8	0.006183548381	-0.000000000411	-0.000038237245	0.006172792066
9	0.006172792066	-0.000000000001	-0.000038104330	0.006172773300
10	0.006172773300	0.000000000000	-0.000038104098	0.006172773300
11	0.006172773300	0.000000000000	-0.000038104098	0.006172773300
	Winkel	0.353673858	°	
	Höhe h	**121.50**		