Die Potenzregel

Es folgen weitere Beispiele für die Ableitung von Potenzfunktionen

$f(x) = ax^3$

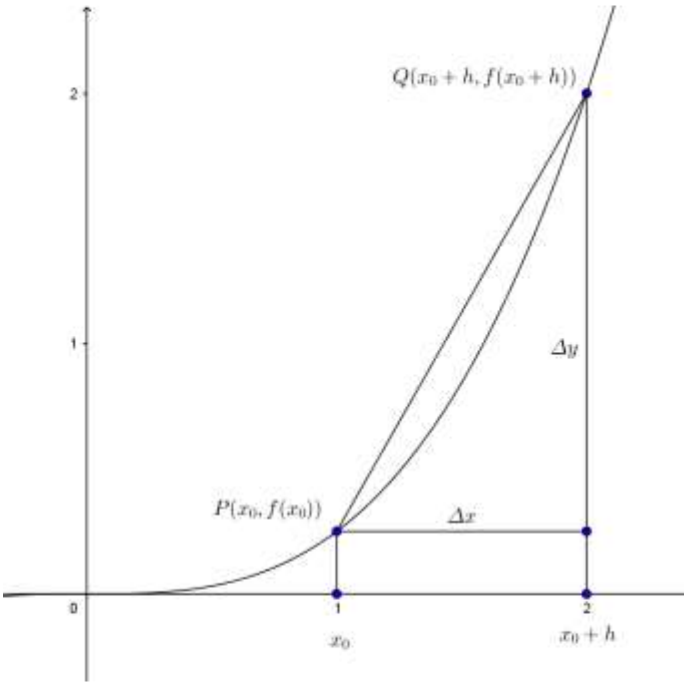
Abbildung: $a = \frac{1}{4}$ $\quad x_0 = 1 \quad h = 1$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = a \cdot \frac{x_0^3 + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - x_0^3}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \cdot (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2)$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} a \cdot (3x_0^2 + 3x_0 h + h^2) = 3ax_0^2$$

$$(ax^3)' = 3ax^2$$



Übungsaufgabe:
Gesucht ist eine Gleichung der Tangente t an die Kurve $y = f(x) = \frac{1}{8}x^3$ im Punkt P(1,?)

Lösung: t: $y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$

Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse:

$(x^1)' = 1 \cdot x^0 (= 1)$

$(x^2)' = 2 \cdot x^1$

$(x^3)' = 3 \cdot x^2$

Auf Grund dieser Beispiele vermuten wir die folgende Regel (Induktives Schliessen):

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ sogenannte **Potenzregel**

Die Potenzregel gilt zunächst für beliebige natürliche Exponenten. Ein Beweis kann nach der Definition der 1. Ableitung mit dem
• Binomischen Lehrsatz
oder durch v
• vollständige Induktion erfolgen (sofern die Produktregel bekannt ist).

Aufgabe:
Es ist zu beweisen, dass die Potenzregel auch für den Exponenten $n = -1$ gilt.

Differenzenquotient:

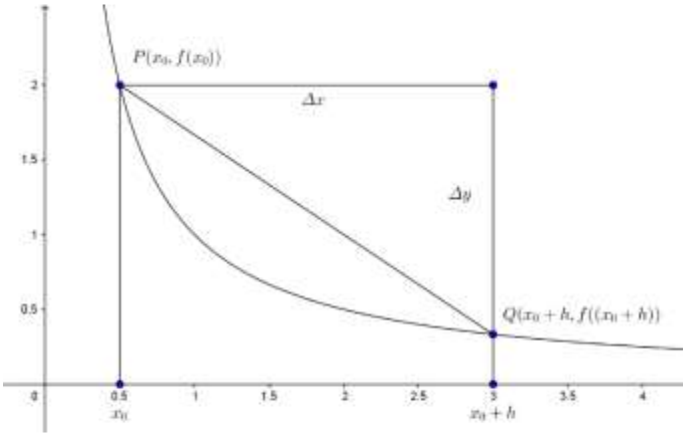
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{x_0 + h} - \frac{1}{x_0} \right) = -\frac{h}{h \cdot x_0 \cdot (x_0 + h)}$$

$$= -\frac{1}{x_0 \cdot (x_0 + h)}$$

$$f'(x_0) = -\lim_{h \to 0} \frac{1}{x_0 \cdot (x_0 + h)} = -\frac{1}{x_0^2}$$

Ergebnis:

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$



Dieses Resultat ergibt sich ebenfalls nach der Potenzregel im Fall $n = -1$:

$$\left(x^{-1} \right)' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

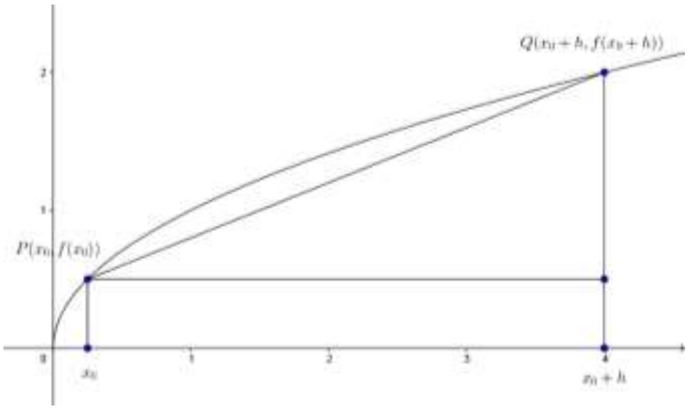
Die Potenzregel gilt auch für beliebige ganze Exponenten. Bei negativen Exponenten ist die 1. Ableitung an der Stelle x = 0 nicht definiert.

Beispiel:

$$\left(\frac{1}{x^4} \right)' = \left(x^{-4} \right)' = (-4) \cdot x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

Ableitung der Quadratwurzelfunktion

$f(x) = \sqrt{x} \quad x \geq 0$



Differenzenquotient:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h}$$

Die Bestimmung des Grenzwerts erfordert einen Kunstgriff. Der Bruch wird nach der 3. Binomischen Formel erweitert.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{h}{h \cdot \left(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Ergebnis:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Der Test zeigt, dass die Potenzregel auch für den Exponenten $n = \frac{1}{2}$ gilt.

Bemerkung:
An der Stelle x = 0 ist die Funktion nicht differenzierbar, da an dieser Stelle der Grenzwert nicht existiert (anschaulich: die vertikale y-Achse ist Tangente).

Es kann gezeigt werden, dass die Potenzregel auch für beliebige rationale, ja sogar für beliebige reelle Exponenten gilt.

Werden also die folgenden Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten geschrieben, dann können die Ableitungen nach der Potenzregel bestimmt werden.

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \tfrac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\tfrac{2}{3} \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^5}}$$

Übungsaufgabe:

gesucht ist die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{3x - 2}$ an der Stelle $x = 1$ als Grenzwert des Differenzenquotienten.

Lösung: $f'(1) = -3$

Lernziel: Für einfache Funktionen die 1. Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten bestimmen können.