6. Weitere Ableitungsregeln

Die Ableitung einer Summe ist gleich der Summe der Ableitungen. Gilt eine entsprechende Vertauschungsaussage auch für das Produkt?

Test an einem Beispiel:
$\left(x\cdot\left(x^2+1\right)\right)' = \left(x^3+x\right)' = 3x^2+1 \neq 1\cdot 2x$ — Die Ableitung eines Produkts ist **nicht** gleich dem Produkt der Ableitungen

Stattdessen gilt:

Satz:	
Voraussetzung:	Die Funktionen f und g sind in einem Intervall I differenzierbar
Behauptung:	$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ **Produktregel**

Beweis:
Sei $F(x) = f(x)\cdot g(x)$. Die erste Ableitung von F ist als Grenzwert der Sekantensteigungen (des Differenzialquotienten) definiert:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

Es wird nun ein geeigneter Term eingeschoben, nämlich $-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot g(x_0+h)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h}$$

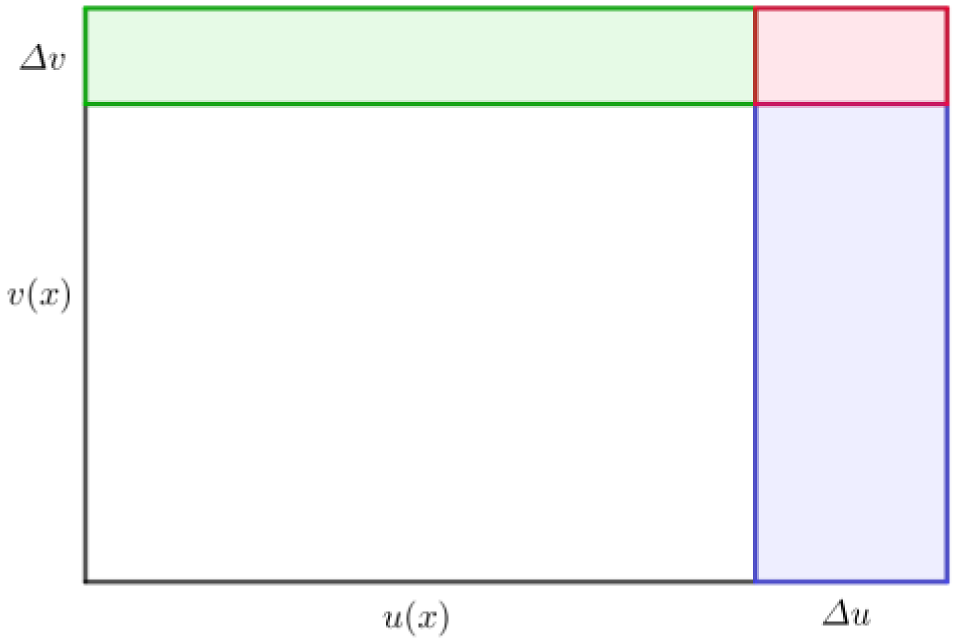
$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right)$$

$$F'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Bem.:
- Die Grenzwerte dürfen summanden- bzw. faktorenweise gebildet werden.
- Da die Funktion g differenzierbar ist, ist sie auch stetig.

Beweisvariante (die Notation wurde verändert)

Das Produkt der Faktoren $u(x)$ und $v(x)$ kann als Flächeninhalt $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ eines Rechtecks dargestellt werden.
Wird x um dx verändert, so verändert sich die Breite um Δu und Δv. Der Flächenzuwachs (gefärbte Rechtecke) beträgt $\Delta f = u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$



Für den Differenzenquotient gilt damit:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x) \cdot \Delta v + v(x) \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v$$

Wegen

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$$

Folgt daraus die Produktregel.

Beispiele:

1.
$\left(x \cdot \ln x\right)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

2.
$\left(e^{2x}\right)' = \left(e^x \cdot e^x\right)' = e^x \cdot e^x + e^x \cdot e^x = 2e^{2x}$ Hinweis auf die →Kettenregel

3.
Kombination mit der Konstantenregel
$\left(\sin(2x)\right)' = \left(2\sin x \cos x\right)' = 2 \cdot \left(\sin x \cos x\right)' = 2 \cdot \left(\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x\right) =$
$2 \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2 \cdot \cos(2x)$

4.
$\left(\sin^2 x\right)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ → Kettenregel

5.
Man wird nicht jedes Produkt mit der Produktregel ableiten:
$\left((2x-1) \cdot \left(x^2 - 2\right)\right)' = \left(2x^3 - x^2 - 4x + 2\right)' = 6x^2 - 2x - 4$ ausmultiplizieren

6.
Verallgemeinerung der Produktregel auf mehrere Faktoren
$\left(f \cdot g \cdot h\right)' = \left(\left(f \cdot g\right) \cdot h\right)' = (f' \cdot g + f \cdot g') \cdot h + (f \cdot g) \cdot h'$
$\left(f \cdot g \cdot h\right)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$
Jeder Faktor wird also genau einmal abgeleitet.
Der Spezialfall $f = g = h$ führt auf
$\left(f^3\right)' = 3 \cdot f^2 \cdot f'$
und durch induktives Schliessen auf die verallgemeinerte Potenzregel:
$\left(f^n\right)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$ n ∈ N →Kettenregel

7.
$\left((3x-1)^{10}\right)' = 10 \cdot (3x-1)^9 \cdot 3$

8.
$\left(\cos^4 x\right)' = -4 \cdot \cos^3 x \cdot \sin x$

Übungsaufgaben:

a)

$$\left((x-3)\cdot\sqrt{x}\right)' = \tfrac{3}{2}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

b)

$$\left(\ln^2 x\right)' = \frac{2\ln x}{x}$$

c)

$$\left(x^2\cdot(\ln x-1)\right)' = x\cdot(2\ln x-1)$$

d)

$\left(x\cdot e^x\right)' = (x+1)\cdot e^x$ höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = (x+n)\cdot e^x$

e)

$\left(x^2 e^x\right)' = \left(x^2+2x\right)\cdot e^x$ höhere Ableitungen $f^{(n)}(x) = \left(x^2+2nx+n\cdot(n-1)\right)\cdot e^x$

f)

$\left(\sin x\cdot(1+\cos x)\right)' = 2\cos^2 x+\cos x-1$ (cos^2 x)' = - sin (2x)

g)

$$\left(\cos^2 x\right)' = -\sin(2x)$$

h)

$$\left(e^x\cdot\sin x\right)' = e^x(\sin x+\cos x)$$

i)

Bad jokes:

$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)' = (1)' = 0$ $\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)'$ = (1)' = 0

$$\left(\tan x\cdot\cot x\right)' = (1)' = 0$$

$$(\cos x\cdot\tan x)' = (\sin x)' = \cos x$$