Quotientenregel

Die Ableitung eines Kehrwerts ist *nicht* gleich dem Kehrwert der Ableitung:
Hingegen gilt:

Satz Spezialfall der Quotientenregel:

Voraussetzung: g differenzierbar und g(x) ≠ 0 in I

Behauptung $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Bemerkung:
Das Ergebnis ergibt sich auch aus der verallgemeinerten Potenzregel für $n = -1$.

Beweis:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)} \cdot \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\right) = -\frac{1}{g(x_0)} \cdot \frac{1}{g(x_0)} \cdot g'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2} \; \square$$

Beispiele:

1.

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

2.

$$\left(e^{-x}\right)' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{e^x}{\left(e^x\right)^2} = -e^{-x}$$ $\rightarrow$ Kettenregel

Der allgemeine Fall wird auf den Spezialfall und die Produktregel zurückgeführt:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{(-g')}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Satz:

Voraussetzung: f, g differenzierbar und g ≠0 in I

Behauptung $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ **Quotientenregel**

Beispiele:

1.

$$\left(\frac{x^2-3x}{x+1}\right)' = \frac{(2x-3)\cdot(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

2.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$$

3.

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ $\qquad$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$

4.

$$\left(x^2\cdot e^{-x}\right)' = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{2x-x^2}{e^x} = \left(2x-x^2\right)\cdot e^{-x}$$

5.

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{1}{1+\cos x} \qquad \left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)' = -\frac{1}{1+\sin x}$$

Nicht jeder Quotient muss mit der Quotientenregel abgeleitet werden:

6.

$$\left(\frac{x^3-8}{x}\right)' = \left(x^2-\frac{8}{x}\right)' = \left(x^2-8x^{-1}\right)' = 2x+8x^{-2}$$

Für Fiesiker (😊):

$$\left(\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}\right)' = \left(\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}\right)' = (1-\cos x)' = \sin x$$

Übungsaufgaben

a)

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$ höhere Ableitungen: $(-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

b)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$ höhere Ableitungen: $(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot n!} \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$

c)

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

d)

$$\left(\frac{x^2-2x+4}{x-2}\right)' = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

e)

$$\left(\frac{x^2-x-2}{x-3}\right)' = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$$

f)

$$\left(\frac{x^2+3}{x+1}\right)' = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

g)

$$\left(\frac{2x}{9+x^2}\right)' = \frac{2\cdot(9-x^2)}{(9+x^2)^2} = 0$$ Lösung: $x = \pm 3$

Mit falscher Umformung zur richtigen Lösung

$$\left(\frac{2x}{9+x^2}\right)' \neq \left(\frac{2}{9}\cdot x + \frac{2}{x}\right)' = \frac{2}{9} - \frac{2}{x^2} = 0$$ Lösung : $x = \pm 3$