7. Beispiele zur Kurvendiskussion

7.1 Die Normalverteilung oder Gaussverteilung

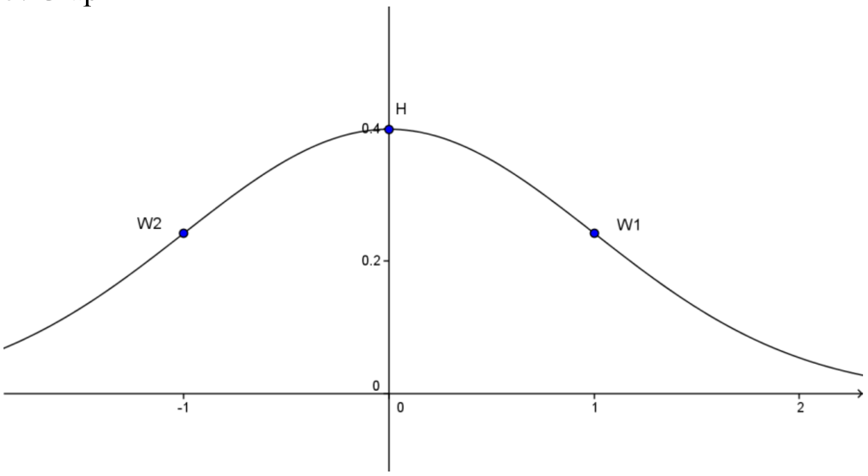
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Symmetrie:
Axialsymmetrie zur y-Achse (der Funktionswert ändert sich nicht, wenn man in der Funktionsgleichung x durch -x ersetzt.
2. Ableitungen

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

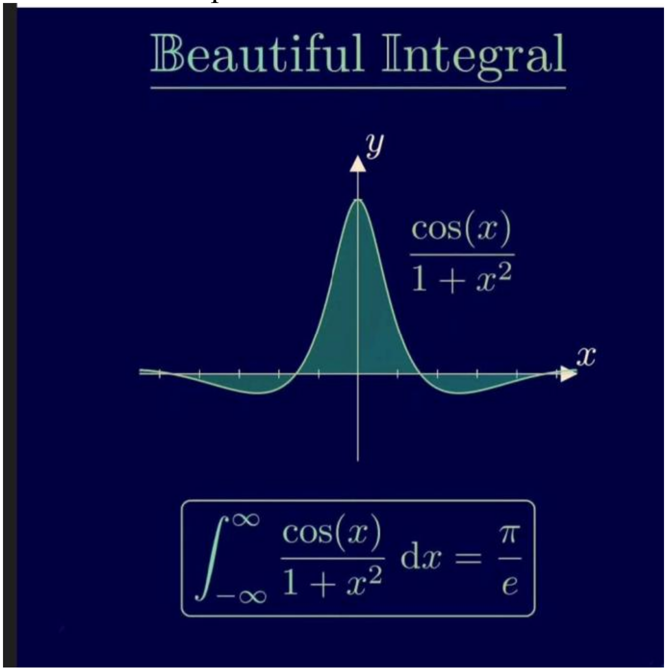
$$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left(x^2-1\right)\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3. Hochpunkt
H(0/0.399) Die 1. Ableitung wechselt an der Stelle 0 das Vorzeichen von + nach -.
4. Wendepunkte
W(1/0.242) und W(-1/0.242) Die 2. Ableitung wechselt an den Stellen 1 und -1 das Vorzeichen.
5. Graph



In der Wahrscheinlichkeitsrechnung spielen bestimmte Integrale von f eine wichtige Rolle. Da f keine elementare Stammfunktion besitzt, werden die Integrale mit Näherungsverfahren ausgewertet (→ Tabelle in F und T).

Ein schöner Graph:



Mögliche Ergänzungen:
Die hyperbolischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen. Der Graph des hyperbolischen Cosinus heisst Kettenlinie.

7.2 Diskussion einer Kurvenschar

$f(x) = (x - a) \cdot e^x \qquad a \in R_0^+$

1. Nullstellen: x = a
2. Ableitungen:

$f'(x) = (x - a + 1) \cdot e^x \qquad f''(x) = (x - a + 2) \cdot e^x \qquad f'''(x) = (x - a + 3) \cdot e^x$

3. Tiefpunkt $\quad T(a-1, e^{a-1})$

Der geometrische Ort aller Tiefpunkte der Kurvenschar ist die Exponentialkurve mit der Gleichung y = - e^x

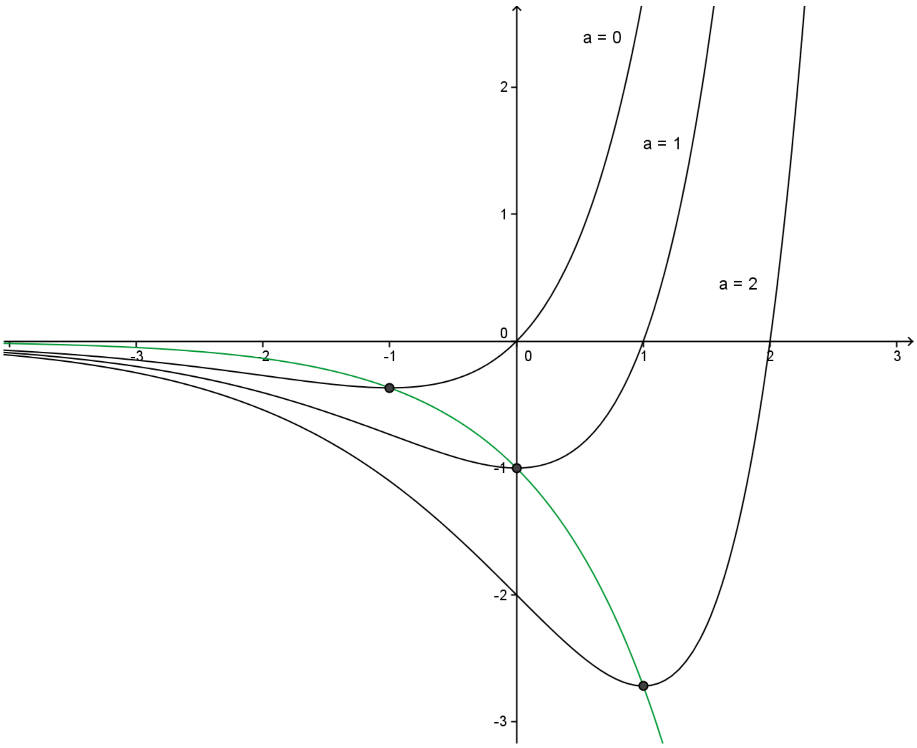
4. Wendepunkt $\qquad W(a-2, -2 \cdot e^{a-2})$

Der geometrische Ort aller Wendepunkte der Kurvenschar ist die Exponentialkurve mit der Gleichung y = -2·e^x .

5.

Die zu a = 2 gehörige Kurve schliesst mit den Koordinatenachsen im 4. Quadranten ein Fläche ein. Für den Inhalt I gilt:

$I = \int_2^0 (x-2) \cdot e^x = (x-3) \cdot e^x \Big|_2^0$ Die Stammfunktion kann in diesem speziellen Fall durch Rückwärtsschliessen aus den Ableitungen vermutet werden.

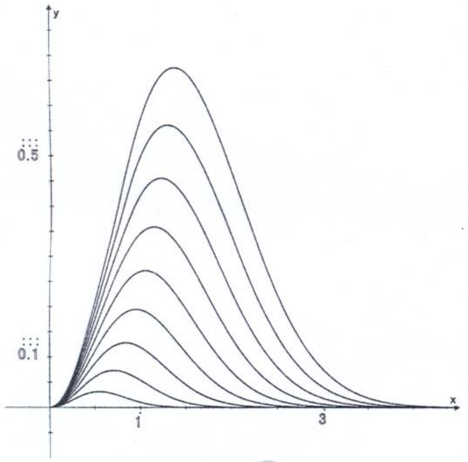


Es gilt der wichtige

> Satz (ohne Beweis)
> Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenzfunktion , d.h. es gilt:
> $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

Bei den folgenden realitätsnahen Beispielen ist die Anwendung von Software nützlich.
Quelle: MNU 58/5 (15.7.2005)

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung



Moleküle der Masse m in einem Gas der Temperatur T (in Kelvin) haben nicht alle die gleiche Geschwindigkeit, sondern es gibt eine gewisse Wahrscheinlichkeit f, dass das Molekül eine Geschwindigkeit v besitzt (korrekter wäre eigentlich die Benützung des Geschwindigkeitsintervalls $[v, v + dv]$). k ist die Bolzmannkonstante.

$$f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

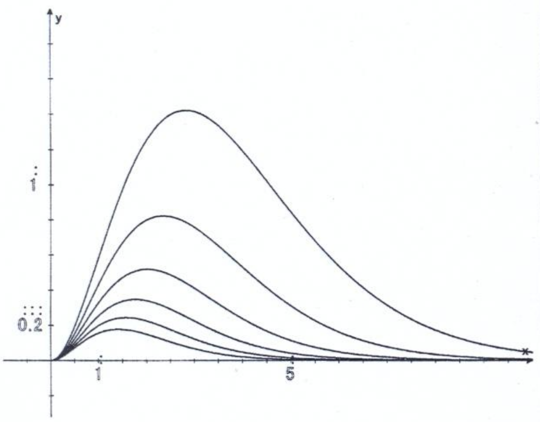
Vereinfacht: $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$ oder mit dem der Temperatur proportionalen Parameter a

$$f_a(x) = a^{\frac{2}{3}} x^2 \cdot e^{\frac{-x^2}{2a}}$$

Hier interessieren natürlich physikalisch die Lage des Maximums und die zu definierende Breite der Verteilung, in Abhängigkeit von der Temperatur. Dazu könnten die Wendepunkte herangezogen werden.

Kasten 4. MAXWELLSCHE Geschwindigkeitsverteilung

Plancksches Strahlungsgesetz



Die Strahlungsintensität ρ eines glühenden (schwarzen) Körpers im Frequenzintervall $[v, v + dv]$ wird durch

$$\rho(v, T)dv = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{hv/(kT)} - 1} dv$$

angegeben. Je nach Temperatur T ergibt sich ein anderes Spektrum $\rho(v)$. h, c und k sind physikalische Konstanten. Rein »mathematisch« geschrieben ist

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{kx} - 1}$$

Interessant ist die Lage des Maximums in Abhängigkeit der Temperatur (Wiensches Verschiebungsgesetz) sowie die Asymptoten für $x \to \infty$ (WIEN) und $x \to 0$ (RAYLEIGH-JEANS). Während alle vorher beschriebenen Beispiele leicht mit analytischen Methoden der Schulmathematik gelöst werden können, stösst man bei diesem letzten Beispiel an die Grenzen symbolischen Rechnens.

Kasten 5. PLANCKSCHES Strahlungsgesetz

7.3. $f(x) = x \cdot \ln x$ $\quad$ **$x > 0$**

1. Nullstellen: $f(x) = x \cdot \ln x = 0 \quad \ln x = 0 \quad x = 1$ einzige Nullstelle wegen $x > 0$.
2. Ableitungen: $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

   $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ $\qquad$ der Graph von f hat also eine Linkskurve
3. Hoch-, Tief-, Wendepunkte des Graphen

   $f'(x) = 1 + \ln x = 0 \quad \ln x = -1 \quad x = \frac{1}{e}$.

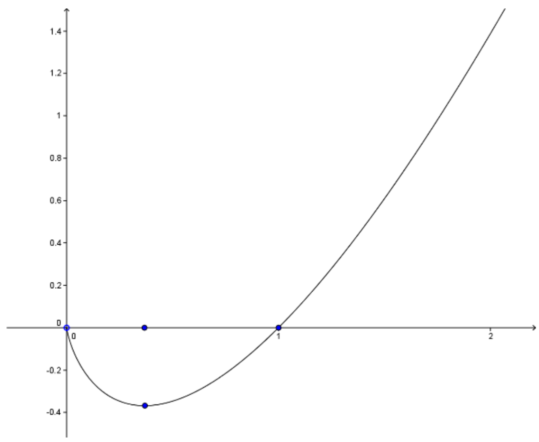
   Da eine Linkskurve des Graphen vorliegt,

   handelt es sich um einen Tiefpunkt $T(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$.

   Da der Graph linksgekrümmt ist, existiert kein Wendepunkt.
4. Verhalten in einer Umgebung der Stelle $x = 0$

   $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x = 0$ und

   $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}(1 + \ln x) = -\infty$



5. Graph
6. Hinweis: $F(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot \ln x$:

   Beweis direkt mit partieller Integration oder

   $F'(x) = x \cdot \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x \cdot \ln x$ (Produktregel)
7. Gesucht ist der Inhalt I(ε) des Flächenstücks, das der Graph von f, die x-Achse und die Parallele zur y-Achse $x = \varepsilon$ $\quad 0 < \varepsilon < 1$ im 4. Quadranten einschliessen.

   $$\int_1^{\varepsilon} x \cdot \ln x \, dx = \left(\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^{\varepsilon} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \ln\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{4}$$

   Wegen $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \cdot \ln\varepsilon = 0$ existiert das uneigentliche Integral

   $$\int_1^{0} x \cdot \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{\varepsilon} x \cdot \ln x \, dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \ln\varepsilon - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Übungsaufgabe:

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad x >$

Lösung:

N(1/0), H(e/e^{-1}), $W(e^{\frac{3}{2}}, 0.33)$,

x-Achse, bzw. y-Achse sind Asymptoten