

### 3. Ableitungen, Integrale

#### Ableitung der Exponentialfunktion

Differenzenquotient der Exponentialfunktion:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Substitution  $e^h - 1 = \frac{1}{n}$

Wegen  $e^h = 1 + \frac{1}{n}$  bzw.  $h = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  gilt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{x_0} \cdot \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Differentialquotient

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \frac{1}{\ln\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)} = e^{x_0}$$

nach Anwenden der Grenzwertsätze für ein Produkt bzw. für einen Quotienten. Ausserdem sind Limesbildung und ln vertauschbar.

Damit gilt:

$$(e^x)' = e^x \quad \text{bzw.}$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

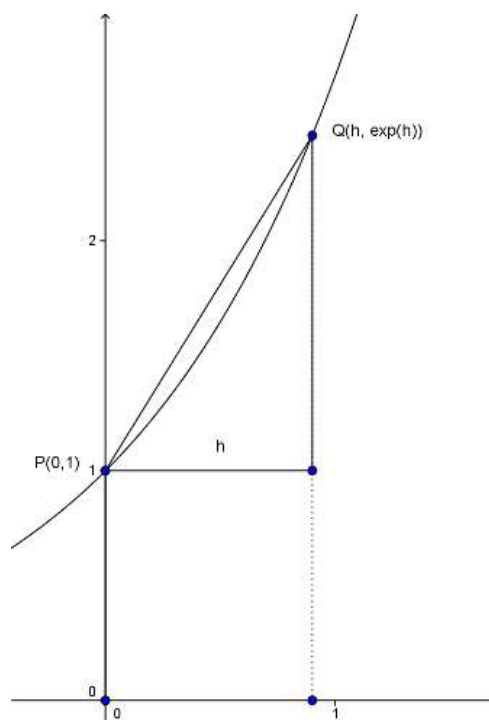
Beispiele:

$$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx} \quad \text{bzw. im Spezialfall } k = -1$$

$$(e^{-x})' = -e^{-x}$$

$$(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x$$

$$(e^x \cdot \cos x)' = e^x \cdot (\cos x - \sin x)$$



was die Vorzugsrolle der Basis e erklärt.

## Ableitung der **Logarithmusfunktion**

Differenzenquotient der Logarithmusfunktion:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right) = \frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$$

Substitution  $\frac{x_0}{h} = t$ . Für  $h \rightarrow \pm 0$  gilt  $t \rightarrow \pm\infty$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t}{x_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$$

Differentialquotient:

$$f'(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \frac{1}{x_0} \cdot \ln\left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right) = \frac{1}{x_0} \cdot \ln e = \frac{1}{x_0}$$

Für die stetige Funktion  $\ln$  sind Limesbildung und  $\ln$  vertauschbar.

Herleitungsvariante mit der Inversenregel:

$y = f(x) = f'(x) = e^x$  aufgelöst nach  $x$ :

$$x = \ln y$$

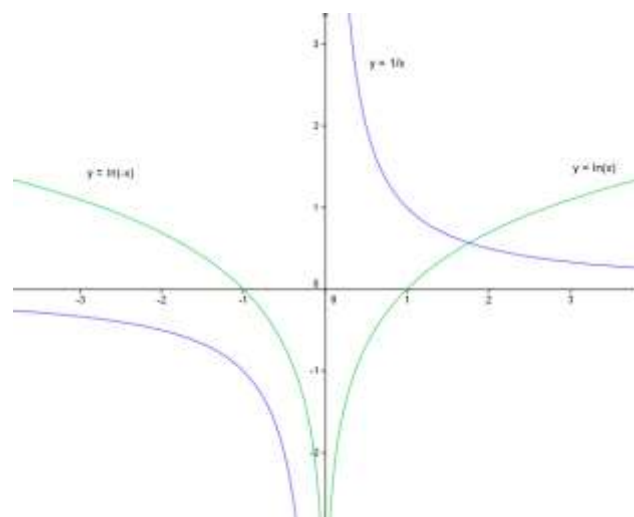
$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0} \quad y_0 > 0 \text{ und}$$

damit nach Vertauschen der Variablen  $x$  und  $y$ :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$$

Für negative  $x$  ist  $\ln(-x)$  definiert und es gilt nach der Kettenregel:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{x} \quad x < 0$$



Zusammenfassend gilt:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad x \neq 0 \text{ bzw.}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

**Basiswechsel**

$$(\log_a x)' = ?$$

$y = \log_a x$  ist gleichbedeutend mit  $x = a^y$

Logarithmiert man diese Gleichung zur Basis e so erhält man:

$$y \cdot \ln a = \ln x \text{ und damit}$$

$$y = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

$$(\log_a x)' = \left( \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

**Verallgemeinerte Potenzregel:**

$$(x^a)' = (e^{a \cdot \ln x})' = e^{a \cdot \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

nicht zu verwechseln mit der Regel für Exponentialfunktionen

$$(a^x)' = (e^{\ln a \cdot x})' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1} \text{ aber } (\sqrt{2}^x)' = \sqrt{2}^x \cdot \ln(\sqrt{2})$$

Beispiele zur Integration:

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_2^3 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{2}{3}$$

### Logarithmische Integration:

Nach der Kettenregel gilt:  $(\ln(g(x)))' = \frac{g'(x)}{g(x)}$   $g(x) \neq 0$  und damit

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c \quad \text{Logarithmische Integration}$$

Lässt sich also der Integrand so umformen, dass im Zähler gerade die 1. Ableitung des Nenners auftritt, dann kann eine Stammfunktion einfach gefunden werden.

Beispiele:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + c$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx = \ln|\ln x| + c \quad x > 0, x \neq 1$$

Ergänzung:

Die Logarithmusfunktion kann auch als "fehlende" Stammfunktion wie folgt definiert werden:

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t} \quad x > 0$$

Daraus lassen sich alle grundlegenden Eigenschaften herleiten.

Da die Exponentialfunktion die Umkehrfunktion der Logarithmusfunktion ist, erhält man mit der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\bar{f}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}$$

erneut die 1. Ableitung der Exponentialfunktion zu  $(e^x)' = e^x$