

2. Logarithmusfunktion

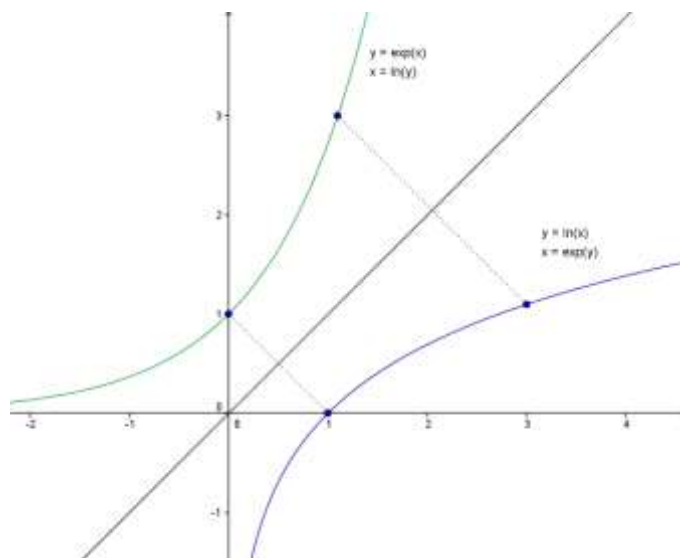
Das Problem, die Gleichung $y = e^x$ für gegebenes $y > 0$ nach x aufzulösen, führt auf die Logarithmusfunktion, die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

Da die Exponentialfunktion monoton wächst, ist die Lösung x eindeutig bestimmt. Wir schreiben für diese eindeutig bestimmte Lösung:

$$x = \log_e y \text{ oder kurz } x = \ln y$$

\ln heisst **natürlicher Logarithmus**.

In der nebenstehenden Abbildung sind die Graphen der Exponentialfunktion $y = e^x$ und der Logarithmusfunktion $y = \ln x$ dargestellt. Da die beiden Funktionen zueinander invers sind, sind die beiden Graphen symmetrisch zur 1. Winkelhalbierenden und es gilt:



$$\ln e^x = x \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad e^{\ln x} = x \quad x \in \mathbb{R}^+$$

Spezialfälle (Logarithmen sind Exponenten!):

$$\ln 1 = \ln e^0 = 0 \quad \ln e = \ln e^1 = 1 \quad \ln e^2 = 2 \quad \ln \frac{1}{e} = \ln e^{-1} = -1$$

$$\ln \sqrt{e} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Bekanntlich gelten die folgenden

Logarithmengesetze:

$$\text{L1: } \ln(uv) = \ln u + \ln v$$

$$\text{L2: } \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v \quad \text{L2': } \ln \frac{1}{v} = -\ln v$$

$$\text{L3: } \ln u^k = k \cdot \ln u$$

$$\text{aber: } \ln(u + v) \neq \ln u + \ln v$$

Der Logarithmus einer Summe ist nicht gleich dem Logarithmus der Summe

Aufgaben:

Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen:

1

$$e^x = 2 \quad x = \ln 2$$

2

$$e^{3x} = 5 \quad 3x = \ln 5 \quad x = \frac{1}{3} \ln 5$$

3

$$e^{2x} = 4e^x$$

Lösung durch Faktorisieren :

$$e^x(e^x - 4) = 0$$

$$x = \ln 4 \quad (e^x > 0 !)$$

4

$$\ln(e^{2x}) = \ln(4e^x) = \ln 4 + \ln(e^x)$$

Lösung durch Logarithmieren:

$$2x = \ln 4 + x$$

$$x = \ln 4$$