

Extremalproblem: Bild an der Wand oder Günstigster Schusswinkel beim Fussball.

An einer vertikalen Wand hängt ein Bild AB. Wie weit soll ein Betrachter vom Bild (horizontal) weggehen, damit sein (vertikaler) Betrachtungswinkel des Bildes möglichst gross wird?

Der Betrachter befinde sich in P, x Meter horizontal vom Bild entfernt.

Der Schwinkel $\alpha - \beta$ ist genau dann maximal, wenn dessen Tangens maximal ist.

1. Zielfunktion

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \text{ soll maximal werden}$$

(Trigonometrie 2 \rightarrow 04 Goniometrie \rightarrow Tangensadditionstheorem)

2. Nebenbedingungen:

$$\tan \alpha = \frac{a}{x} \text{ und } \tan \beta = \frac{b}{x}$$

$$3. \tan(\alpha - \beta) = \frac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{x}} = \frac{x(a-b)}{x^2 + ab}$$

4. $\tan(\alpha - \beta)$ wird genau dann maximal, wenn $f(x) = \frac{x}{x^2 + ab}$ maximal wird.

$$f'(x) = \frac{x^2 + ab - 2x^2}{(x^2 + ab)^2} = 0 \text{ für } x_{1,2} = \pm\sqrt{ab}$$

(negative Lösung für eine optimale Betrachtung der Rückseite des Bildes (-:-))

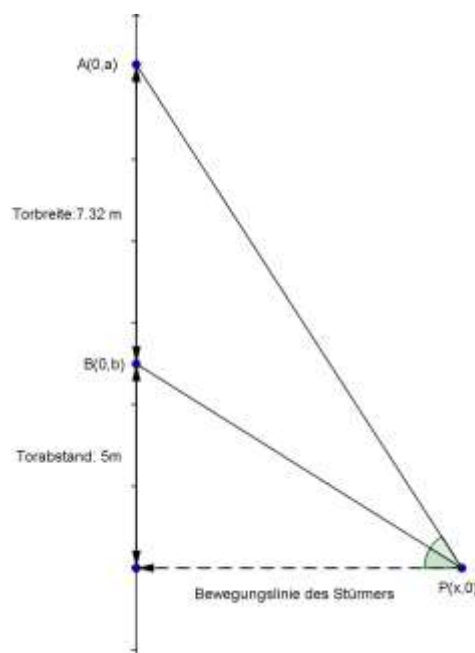
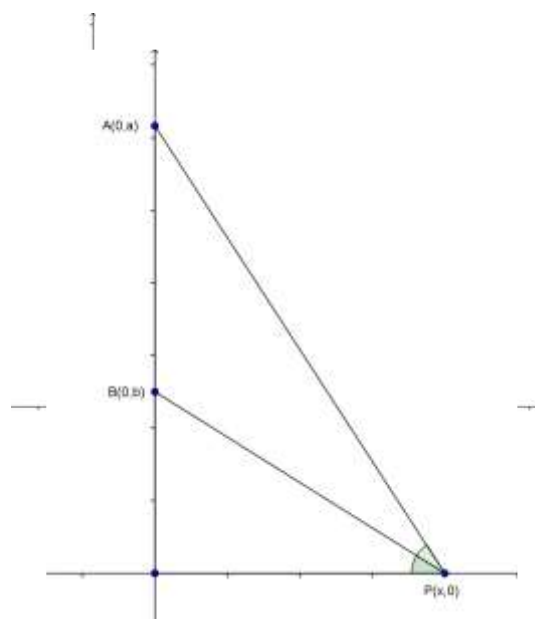
Eine andere Einkleidung:

Günstigster Schusswinkel beim Fussball.

Der Stürmer bewege sich parallel zur Seitenlinie in Richtung des gegnerischen Tors. Mit den Angaben in der Skizze ergibt sich

$$a = 5 + 7.32 = 12.32 \text{ m und } b = 5 \text{ m}$$

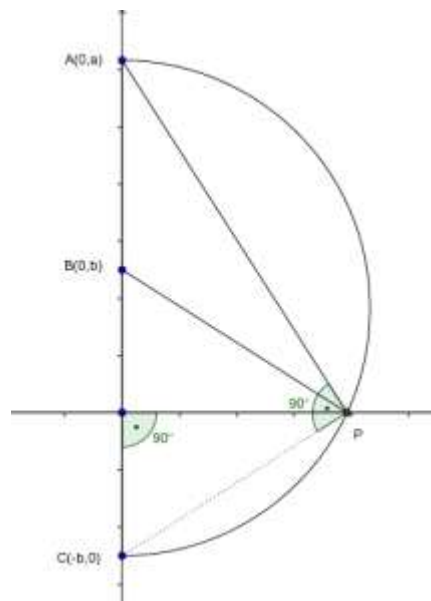
Optimaler Winkel 25° für $x = 8 \text{ m}$



Elementargeometrische Interpretation des Resultats:

a) mit dem Höhensatz:

Der gesuchte Punkt liegt auf dem Thaleskreis über der Strecke AC mit dem Durchmesser $a + b$.



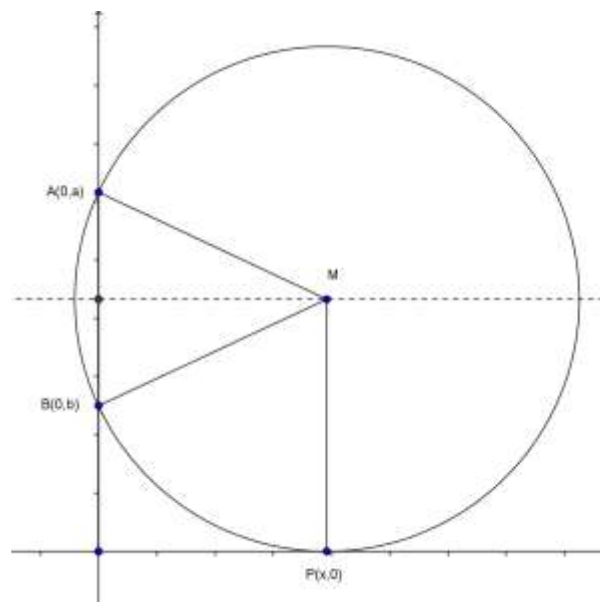
b) mit dem Peripheriewinkelsatz:

P liegt auf dem Kreis, der durch den oberen Bildpunkt A und den unteren Bildpunkt B geht und die Gerade der Augengerade berührt. Sein Mittelpunkt liegt auf der Parallelen zur Augenhöhengeraden durch die Bildmitte.

Begründung:

Jeder andere Punkt der Augengeradenhöhe liegt auf einem grösseren Kreis durch die Bildränder, was den Winkel verkleinert. Die rechnerische Lösung ergibt sich nach dem Sekantentangentensatz

$$x^2 = ab.$$



Das Resultat kann auch ohne Differentialrechnung folgendermassen hergeleitet werden.

Dazu schreibt man $f(x)$ folgendermassen um:

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{ab}{x}}.$$

Da der Zähler konstant ist, wird $f(x)$ genau dann maximal, wenn der Nenner minimal ist. Im Nenner steht die Summe zweier Zahlen, deren Produkt gleich ab also konstant ist.

Der Nenner wird also minimal, wenn die Summanden gleich gross sind d.h. wenn gilt:

$$x = \frac{ab}{x} \text{ oder also } x = \sqrt{ab}$$