Gebrochen rationale Funktionen

1. Einführende Beispiele, Definitionen

Definition
Eine Funktion F heisst genau dann gebrochen rational, wenn sie als Quotient zweier Polynomfunktionen dargestellt werden kann, d.h. F lässt sich in der folgenden Form darstellen

$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ wobei f und g Polynome sind.

Beispiele:

$F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1$ ganzrationale Funktion, Polynomfunktion 3. Grades.

B: $F(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ gebrochen rationale Funktion

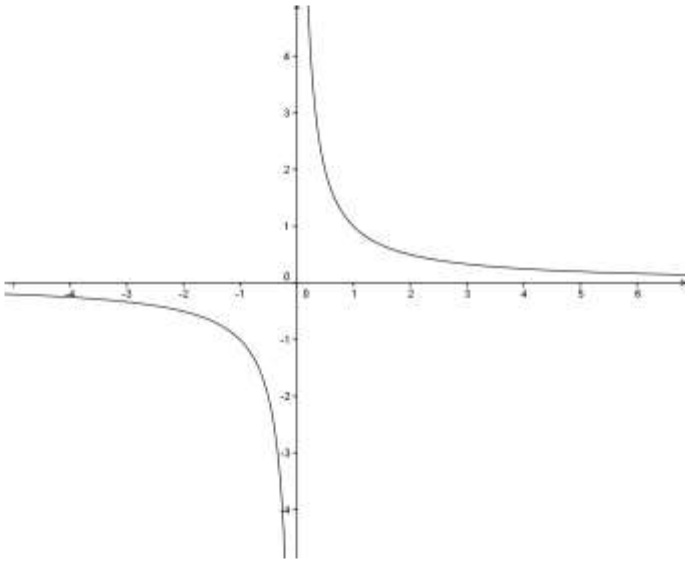
B: $F(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ keine gebrochen rationale Funktion

Im Unterschied zu den Polynomen können Definitionslücken auftreten.

Beispiel 1:
$F(x) = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$

Nähert sich x der Definitionslücke 0, so werden die Beträge der Funktionswerte schliesslich grösser als jede noch so grosse positive Zahl. Die Definitionslücke x = 0 heisst Polstelle. An der Polstelle wechselt in diesem Beispiel die Funktion das Vorzeichen (abgekürzt: VZW an der Stelle x = 0). Der Graph der Funktion kommt der y-Achse schliesslich beliebig nahe, wir sagen:

Der Graph hat an der Polstelle x = 0 eine vertikale Asymptote.

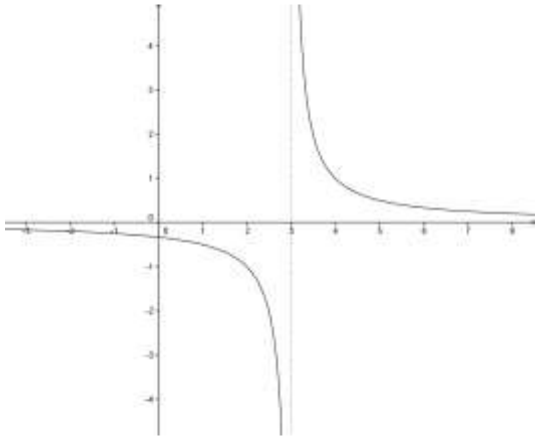


Für betragsgrosse x werden die Beträge der Funktionswerte schliesslich kleiner als jede noch so kleine positive Zahl. Dies bedeutet geometrisch: Der Graph der Funktion kommt der x-Achse beliebig nahe. Wir sagen: Die x-Achse ist horizontale Asymptote.

B2:

$$F(x) = \frac{1}{x-3} \quad x \neq 3$$

Der Graph der Funktion entsteht aus dem von B1 durch Translation um 3 Einheiten in positiver x-Richtung. Die Polstelle kommt dadurch an die Stelle x = 3 zu liegen.



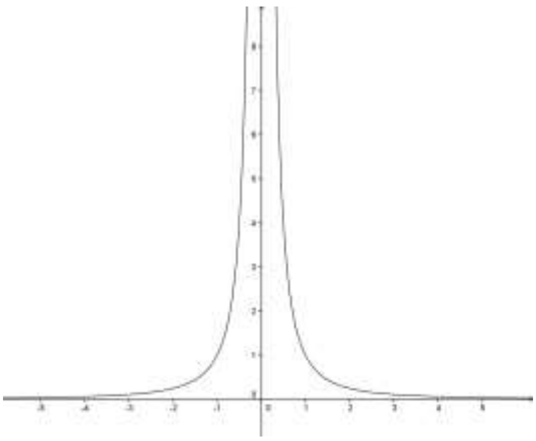
B3:

$$F(x) = \frac{2x-5}{x-3} = \frac{1}{x-3} + 2 \quad x \neq 3$$

Der Graph der Funktion entsteht aus dem von B2 durch Translation um 2 Einheiten in
y- Richtung
Horizontale Asymptote mit der Gleichung y = 2 (Parallele zur x-Achse).

B4:

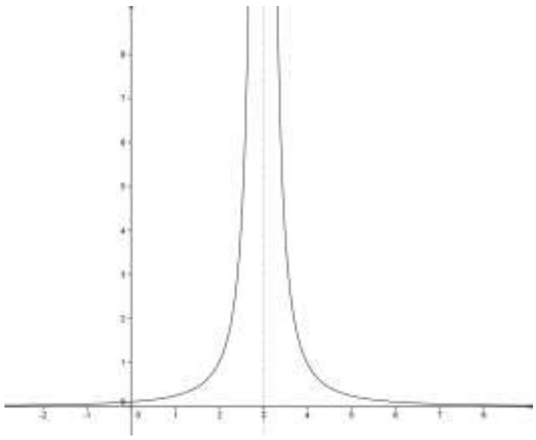
$$F(x) = \frac{1}{x^2} \quad x \neq 0$$



Pol der Stelle x = 0 ohne VZW.
Vertikale Asymptote an der Polstelle.
Die x-Achse ist horizontale Asymptote

B5:

$$F(x) = \frac{1}{(x-3)^2} \quad x \neq 3$$



Pol an der Stelle x = 3 ohne VZW.
Vertikale Asymptote an der Polstelle.
Die x-Achse ist horizontale Asymptote

B6:

$$F(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$$

F stimmt mit Ausnahme der Definitionslücke -1 mit $g(x) = x - 1$ überein. In diesem Fall ist also die Definitionslücke keine Polstelle. Man sagt, die Funktion F ist nach x = -1 stetig fortsetzbar.

Definition:

Eine Definitionslücke x_0 einer Funktion F heisst Polstelle von F, wenn in einer Umgebung von x_0 die Beträge der Funktionswerte über alle Grenzen wachsen.

Bemerkung:

Der Graph der Funktion F kommt der Geraden x = x_0 beliebig nahe. Diese Gerade heisst vertikale Asymptote des Graphen.

Satz:

Die Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g Polynome) sind bei den Nullstellen des Nenners zu suchen, die nicht zugleich Nullstellen des Zählers sind:
Es gilt also die folgende hinreichende Bedingung:

Ist $g(x_0) = 0$ und $f(x_0) \neq 0$ dann ist x_0 Polstelle der Funktion F.

Bemerkung:
Ist die Nennernullstelle von ungerader Ordnung, so wechselt F an der Stelle x_0 das Vorzeichen, bei gerader Ordnung nicht.

Eine Formulierungsvariante:

Definition:
Eine Definitionslücke x_0 der Funktion F heisst Polstelle von F, wenn sich F in der folgenden Form darstellen lässt:
$F(x)=\frac{h(x)}{(x-x_0)^n}$ mit $h(x_0) \neq 0$

Bemerkung:
Ist n gerade, dann wechselt F an der Polstelle das Vorzeichen, für ungerade n nicht.

B: $F(x)=\frac{x}{x+1}$ Nullstelle mit VZW an der Stelle x = 0, Polstelle mit VZW an der Stelle x = -1

B: $F(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$ Nullstelle mit VZW an der Stelle x = 0, Polstelle ohne VZW an der Stelle x = -1

Entsprechend gilt für die **Nullstellen** einer gebrochen rationalen Funktion:

Satz:
Die Nullstellen einer gebrochen rationalen Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g Polynome) sind bei den Nullstellen des Zählers zu suchen, die nicht zugleich Nullstellen des Nenners sind:
Es gilt also die folgende hinreichende Bedingung:

Ist $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$ dann ist x_0 Nullstelle der Funktion F

Beispiel:

$$F(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 1)\cdot(x+2)^4}$$

Nullstelle 3. Ordnung an der Stelle x = 0 mit VZW

Polstelle bei x = 1 bzw. x = -1 von 1. Ordnung mit VZW,
Polstelle bei x = -2 von 4. Ordnung ohne VZW.