02 Pole, Nullstellen

Definition:

Eine Definitionslücke x_0 einer Funktion F heisst Polstelle von F, wenn in einer Umgebung von x_0 die Beträge der Funktionswerte über alle Grenzen wachsen.

Bemerkung:

Der Graph der Funktion F kommt der Geraden x = x_0 beliebig nahe. Diese Gerade heisst vertikale Asymptote des Graphen.

Satz:

Die Polstellen einer gebrochen rationalen Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g Polynome) sind bei den Nullstellen des Nenners zu suchen, die nicht zugleich Nullstellen des Zählers sind:
Es gilt also die folgende hinreichende Bedingung:

Ist $g(x_0) = 0$ und $f(x_0) \neq 0$ dann ist x_0 Polstelle der Funktion F.

Bemerkung:
Ist die Nennernullstelle von ungerader Ordnung, so wechselt F an der Stelle x_0 das Vorzeichen, bei gerader Ordnung nicht.

Eine Formulierungsvariante:

Definition:
Eine Definitionslücke x_0 der Funktion F heisst Polstelle von F, wenn sich F in der folgenden Form darstellen lässt:
$F(x) = \frac{h(x)}{(x - x_0)^n}$ mit $h(x_0) \neq 0$

Bemerkung:
Ist n gerade, dann wechselt F an der Polstelle das Vorzeichen, für ungerade n nicht.

B: $F(x) = \frac{x}{x+1}$ Nullstelle mit VZW an der Stelle x = 0, Polstelle mit VZW an der Stelle x = -1

B: $F(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ Nullstelle mit VZW an der Stelle x = 0, Polstelle ohne VZW an der Stelle x = -1

Entsprechend gilt für die **Nullstellen** einer gebrochen rationalen Funktion:

> Satz:
> Die Nullstellen einer gebrochen rationalen Funktion $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (f, g Polynome) sind bei den Nullstellen des Zählers zu suchen, die nicht zugleich Nullstellen des Nenners sind:
> Es gilt also die folgende hinreichende Bedingung:
>
> Ist $f(x_0) = 0$ und $g(x_0) \neq 0$ dann ist x_0 Nullstelle der Funktion F

Beispiel:

$$F(x) = \frac{x^3}{\left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x + 2\right)^4}$$

Nullstelle 3. Ordnung an der Stelle x = 0 mit VZW

Polstelle bei x = 1 bzw. x = -1 von 1. Ordnung mit VZW,
Polstelle bei x = -2 von 4. Ordnung ohne VZW.