

## 2. Asymptotisches Verhalten

Je nach Grad des Zählerpolynoms bzw. des Nennerpolynoms ändert sich das Verhalten einer gebrochen rationalen Funktion  $F$  für betragsgroße  $x$ .

Sei  $n$  der Grad des Zählerpolynoms,  $m$  der des Nennerpolynoms

### 1. Fall: $n < m$ Der Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad

Beispiel:

$$F(x) = \frac{2x + 1}{x^2}$$

1. Nullstelle:  $x = -\frac{1}{2}$  mit VZW

2. Polstelle:  $x = 0$  ohne VZW

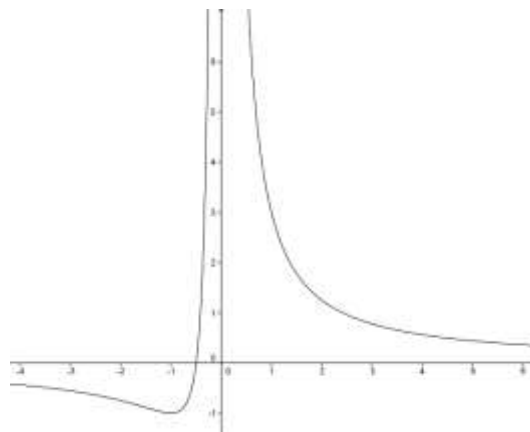
3. Asymptotisches Verhalten:

Division des Zähler- und des Nennerpolynoms durch die höchste Potenz von  $x$

$$F(x) = \frac{2x + 1}{x^2} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Für betragsgroße  $x$  kommen die Funktionswerte der Zahl 0 beliebig nahe d.h. es gilt:  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$

Die  $x$ -Achse ist Asymptote.



4. Extrema:

Die 1. Ableitung kann mit der Potenzregel oder der Quotientenregel berechnet werden:

Mit der Potenzregel:

$$F'(x) = \left( \frac{2x+1}{x^2} \right)' = \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)' = (2x^{-1} + x^{-2})' = -2x^{-2} - 2x^{-3} = -2 \cdot \frac{(x+1)}{x^3}$$

Mit der Quotientenregel:

$$F'(x) = \frac{-2x^2 - 2x}{x^4} = -2 \cdot \frac{(x+1)}{x^3} \quad \text{gemeinsame Faktoren im Zähler und Nenner kürzen!}$$

Der Graph hat an der Stelle  $-1$  einen Tiefpunkt  $T(-1, -1)$ , denn die 1. Ableitung wechselt das Vorzeichen von  $-$  nach  $+$ .

5. Wendepunkte:

$$F''(x) = \frac{2(2x+3)}{x^4} = 0 \quad \text{Der Graph hat an der Stelle } -\frac{3}{2} \text{ einen Wendepunkt } W\left(-\frac{3}{2}, -\frac{8}{9}\right)$$

die 2. Ableitung wechselt das Vorzeichen.

6. Graph:

Der Graph entsteht aus den Graphen der beiden Teilfunktionen  $f(x) = \frac{4}{x}$  und  $g(x) = \frac{2}{x^2}$  durch

Superposition.

Satz:

Ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad, dann ist die  $x$ -Achse Asymptote des Graphen.

Übungsaufgabe:

$$F(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

Beispiel für eine gebrochen rationale Funktion in der Physik:

### Zustandsgleichung realer Gase (Van der Waalsgleichung) (WBZ-Kurs 94.04.01)

Betrachtet man anstatt der Zustandsgleichung idealer Gase  $pV = nRT$  das angepasste Modell

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right) \cdot (v - nb) = nRT \quad \text{mit den Korrekturtermen } \frac{an^2}{b} \text{ (Binnendruck) und } b \text{ (Kovolumen),}$$

so erhält man für  $n = 1$  (n Anzahl Mole) die folgende gebrochen rationale Funktion für die Isothermen ( $T = \text{const.}$ ):

$$p = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad \text{R: Universelle Gaskonstante}$$

Beispiel:  $\text{CO}_2$ :

$$a = 0.362 \text{ Nm}^4, \quad b = 4.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3, \quad T = 0^\circ\text{C} = 273.15\text{K}$$

$$0 \leq V \leq 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3, \quad 0 \leq p \leq 10^7 \text{ N/m}^2$$

Die gestrichelte Kurve ist diejenige des idealen Gases mit  $pV = RT$

Für die Koordinaten des Punktes H erhält man übrigens:

$$V = 0.0001912 \quad \text{und} \quad p = 5.42152 \cdot 10^6$$

