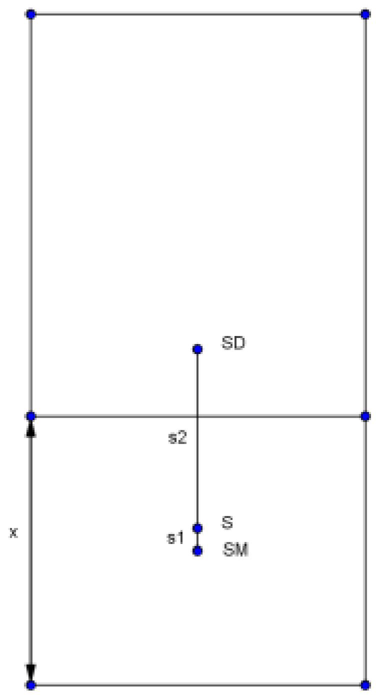
Extremalproblem: Schwerpunkt einer Mineralwasserdose (nach einer Idee von Wh**)**

Bei welcher Füllmenge einer Mineralwasserdose liegt der Schwerpunkt am tiefsten?



Der Schwerpunkt S_D der leeren Dose mit der Masse m_D liegt genau in der Mitte des grossen Rechtecks bei ½ (Einheit: Dosenhöhe).Ist die Dose bis zur Höhe x mit Mineralwasser gefüllt, so liegt der Schwerpunkt S_M des Mineralwassers mit der Masse m_M in der halben Höhe ½ x.
Der gemeinsame Schwerpunkt S des Systems liegt auf der Verbindungsgeraden der beiden Schwerpunkte (näher bei der schwereren Masse) und teilt die Strecke im Verhältnis der beiden Massen d.h. es gilt:

$$\frac{s_1}{s_1+s_2}=\frac{m_D}{m_B+m_D} \qquad (1)$$

Annahme: $m_D = 25$ g, $m_M = 500 \cdot x$ g
$s_1 + s_2$ ist gerade gleich der Differenz zwischen den beiden Schwerpunkten S_D und S_M: $\frac{1}{2} \cdot (1 - x)$

Damit gilt nach (1)

$$\frac{s_1}{\frac{1}{2}\cdot(1-x)}=\frac{25}{500x+25}$$ oder nach s_1 aufgelöst $$s_1=\frac{25}{500x+25}\cdot\frac{1-x}{2}=\frac{1-x}{40x+2}$$

Addiert man zu s_1 noch ½ x, so erhält man für die Höhe des Gesamtschwerpunkts:

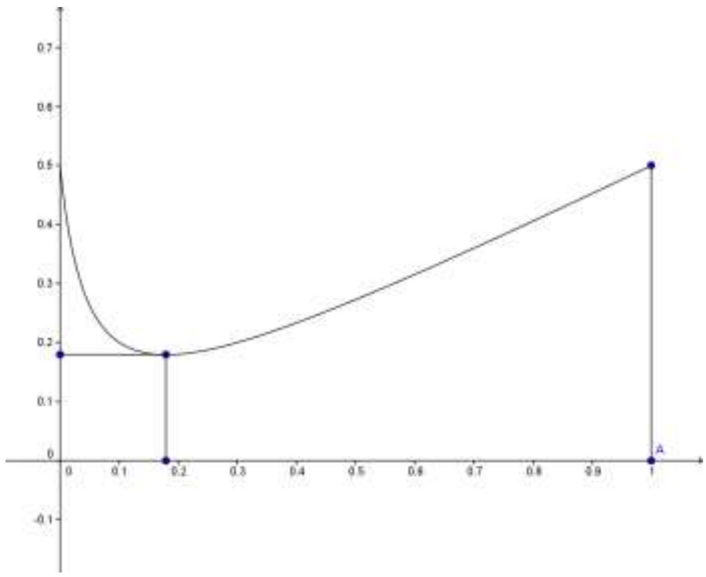
$$s(x)=\frac{x}{2}+\frac{1-x}{40x+2}=\frac{20x^2+1}{40x+2} \qquad (2)$$

$$s'(x)=10\cdot\frac{20x^2+2x-1}{(20x+1)^2}=0$$

$$20x^2+2x-1=0$$

$$x_{1,2}=\tfrac{1}{20}\cdot\left(-1\pm\sqrt{21}\right) \qquad (3)$$

$$x_1\approx 0.179 \quad x_2<0$$



Lösung:
Bei einer Füllhöhe von ca. 18% liegt der Schwerpunkt am tiefsten.

Bemrkung:
Es fällt auf, dass in diesem Fall der Schwerpunkt mit dem Mineralwasserspiegel übereinstimmt, denn die Gleichung s(x) = x hat dieselben Lösungen (3) (?).