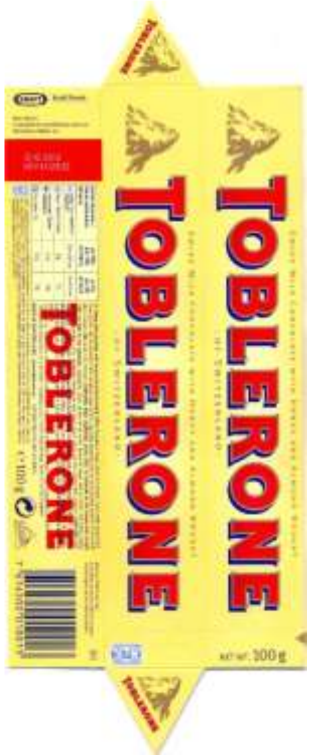
Extremalaufgabe: Toblerone



(Matura 2000 Zofingen, Typus B und D):
Die Verpackung einer Toblerone-Schokolade ist ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge s als Grund- und Deckfläche und mit der Höhe h. In der Abbildung ist die Abwicklung der Verpackung dargestellt.
Wie sind die Seite s und die Höhe h zu wählen, damit die Oberfläche O bei vorgegebenem Volumen V = 300 cm^3 möglichst klein wird?

1. Zielfunktion:

$$O = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s^2 + 3sh$$

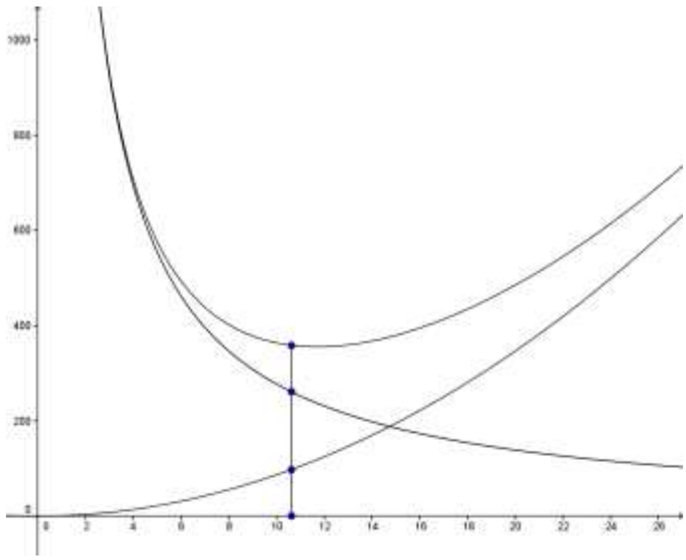
2. Nebenbedingung:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2 h \quad h = \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot s^2}$$

3. Zielfunktion in einer Variablen:

$$O(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(s^2 + \frac{8V}{s} \right)$$

Der Graph von O ist die Überlagerung einer Ursprungsparabel und einer rechtwinkligen Hyperbel.



4. $O'(s) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2s - \frac{8V}{s^2} \right) = \sqrt{3} \cdot \left(s - \frac{4V}{s^2} \right) = 0$

$$s^3 = 4V \qquad s = \sqrt[3]{4V} \approx 10.63 \text{ cm}$$

$$h = \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot s^2} = \frac{4V}{\sqrt{3} \cdot (4V)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4V} \approx 6.14$$

cm

$$O_{\min} \approx 293.4 \, cm^2$$

Bemerkung:
Der Vergleich mit der Realität fällt ernüchternd aus. Eine Messung an einem ähnlichen Produkt ergab die folgenden Werte: s = 3.6 cm bzw. h = 20.7 cm. Offenbar spielen bei der Fabrikation andere Aspekte eine gewichtigere Rolle.