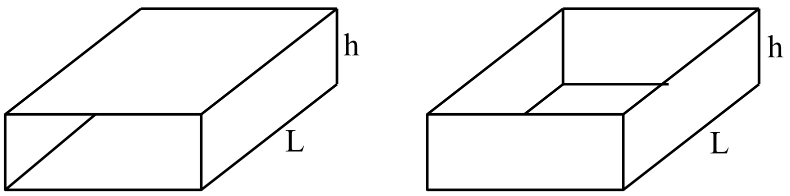
Extremalproblem: Zündholzschachtel (ac)

Eine Zündholzschachtel besteht aus zwei Teilen: der "Hülle" und der eigentlichen Schachtel.



Die Schachtel bietet Platz für 50 Zündhölzer. Damit sind die Länge L und das Volumen V vorgegeben: L = 58 mm V = 32'480 mm^3. Gesucht ist also die Breite x, für die die Materialfläche A minimal wird.
Welche Form muss die Schachtel haben, damit für die Herstellung
a) der Hülle A_H
b) der Hülle A_H und der Schachtel A_S möglichst wenig Material gebraucht wird?

Bemerkung:
Für die Hülle und die Schachtel können dieselben Längen L, h und x verwendet werden.

a)

1. Zielfunktion:
Fläche der Hülle: $A_H = 3Lh + 2Lx$
2. Nebenbedingung:
vorgegebenes Volumen: $V = Lxh \quad h = \frac{V}{Lx}$

3. Zielfunktion: $A_H(x) = \frac{3V}{x} + 2Lx$

4. $A'_H(x) = -\frac{3V}{x^2} + 2L = 0 \qquad x^2 = \frac{3V}{2L} \qquad x_1 = \sqrt{\frac{3V}{2L}} \qquad x_2 = -x_1 < 0$ ist keine Lösung

Ergebnis:
Der Materialverbrauch für die Hülle der Zündholzschachtel wird minimal für die Breite x ≈ 29.0 mm. Die Höhe ist dann h ≈ 19.3 mm und der Flächeninhalt der Hülle $A_H = 6724\ mm^2$.

b) (aufwändiger)

1. Zielfunktion:

Fläche der Hülle: $A_H = 3Lh + 2Lx$

Fläche der Schachtel: $A_S = (x+2h)\cdot(L+3h) = Lx + 3xh + 2Lh + 6h^2$

Gesamtverbrauch $A = 3Lx + 3xh + 5Lh + 6h^2$

2. Nebenbedingung: $h = \dfrac{V}{Lx}$

3. Zielfunktion: $A(x) = 3Lx + \dfrac{3V}{L} + \dfrac{5V}{x} + \left(\dfrac{V}{L}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{x^2}$

L und V eingesetzt $A(x) = 174x + 1680 + \dfrac{162400}{x} + \dfrac{1881600}{x^2}$

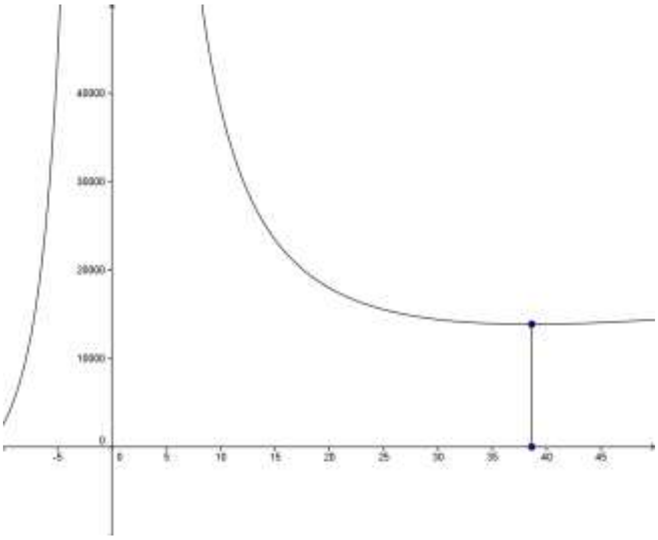
4. Bestimmung des Minimums:

$A'(x) = 174 - \dfrac{162400}{x^2} - \dfrac{3763200}{x^3} = 0$

mit x^3 multipliziert

$174x^3 - 162400x - 3763200 = 0$

Ein numerisches Verfahren ergibt die Lösung x ≈ 38.64.



Ergebnis:

Der Materialverbrauch für Hülle und Schachtel wird für x ≈ 38.6 mm minimal. Die zugehörige Höhe ist dann h ≈ 14.5 mm.