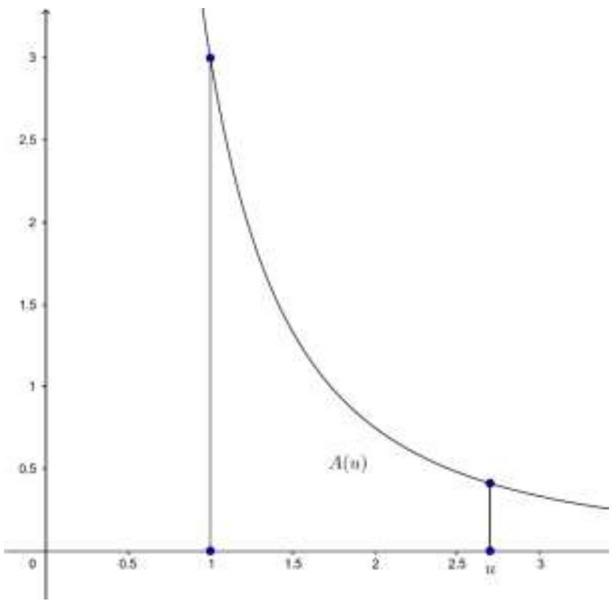
11. Uneigentliche Integrale

Die bisherige Definition des bestimmten Integrals setzt voraus, dass der Integrand in einem abgeschlossenen endlichen Intervall $[a, b]$ stetig ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen auch ∞ oder eine Polstelle als Integrationsgrenzen möglich sind. Man spricht in diesem Fall von uneigentlichen Integralen.

Uneigentliche Integrale vom Typ $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Einführende Aufgabe:
Gesucht ist der Inhalt A(u) der Fläche, die von der Kurve $y = f(x) = \frac{3}{x^2}$, der x-Achse und den Geraden $x = 1$ und $x = u$ $(u > 1)$ begrenzt wird.



$$A(u) = \int_1^u \frac{3}{x^2}\,dx = -\frac{3}{x}\bigg|_1^u = \frac{3}{x}\bigg|_u^1 = 3 - \frac{3}{u}$$

Da der Grenzwert für u gegen unendlich in diesem Fall existiert, schreibt man:

$$\int_1^\infty \frac{3}{x^2}\,dx = \lim_{u\to\infty} A(u) = 3$$

Anschaulich bedeutet dies, dass das ins Unendliche reichende Flächenstück den Inhalt 3 hat.

Dreht man die Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Körper mit dem Volumen V(u).

$$V(u) = \pi\int_1^u \frac{9}{x^4}\,dx = 9\pi\cdot\left(-\frac{1}{3x^3}\right)\bigg|_1^u = 9\pi\cdot\left(\frac{1}{3x^3}\right)\bigg|_u^1 = 3\pi\cdot\left(1-\frac{1}{u^3}\right)$$

Da auch in diesem Fall der Grenzwert für u gegen ∞ existiert, schreibt man

$$\pi\cdot\int_1^\infty \frac{9}{x^4}\,dx = \lim_{u\to\infty} V(u) = 3\pi$$

Ersetzt man die Funktion $f(x) = \frac{3}{x^2}$ durch $f(x) = \frac{1}{x}$, so erhält man für $A(u) = \ln u$ und

$$V(u) = \pi\left(1-\frac{1}{u}\right)$$

Da der Grenzwert von A(u) für u gegen ∞ hat keinen endlichen Wert hat, ist das uneigentliche Integral divergent. Der Grenzwert von V(u) hingegen ist π, das uneigentliche Integral ist konvergent. Das paradox erscheinende Ergebnis bedeutet anschaulich, dass eine Fläche mit unendlich grossem Inhalt einen Körper mit endlichem Volumen erzeugt.

Das allgemeine Vorgehen:
Zunächst wird über das endliche Intervall $[a, u]$ integriert. Der Wert des Integrals A(u) hängt noch von u ab. Existiert der Grenzwert für u gegen unendlich so legt man fest:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)\,dx$$

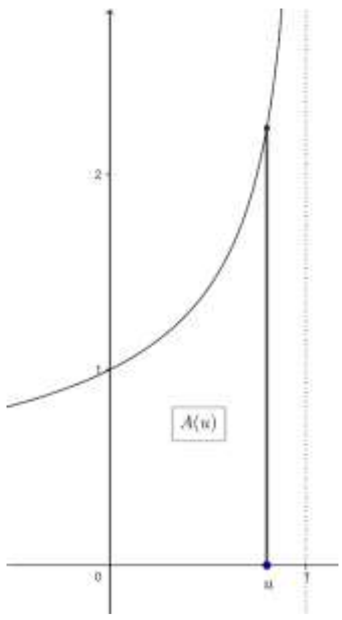
Die eine Integralgrenze ist eine Polstelle

In der folgenden Aufgabe hat die gegebene Funktion an einer der Intervallgrenzen eine Polstelle:

Aufgabe:
Gesucht ist der Inhalt A(u) der von der Kurve

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad x < 1 \ ,$$

von den Koordinatenachsen und
der Geraden x = u (u < 1) begrenzten Fläche.



$$A(u) = \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^u = \left(2\sqrt{1-x}\right)\Big|_u^0 = 2 - 2\sqrt{1-u}$$

Da der Grenzwert A(u) für u wachsend gegen 1 existiert, definiert man:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{u\uparrow 1} A(u) = 2$$

Dreht man die Fläche mit dem Inhalt A(u) um die x-Achse so entsteht ein Rotationskörper mit dem Inhalt

$$V(u) = \pi \int_0^u \frac{dx}{1-x} = \pi \cdot [(ln|1-x|)]_u^0 = -\pi \cdot ln|1-u|$$

Strebt u wachsend gegen 1, so strebt V(u) gegen -∞. Das uneigentliche Integral existiert in diesem Fall nicht. Anschaulich bedeutet dies: Obwohl die erzeugende Fläche einen endlichen Inhalt hat, erzeugt sie kein endliches Volumen.

Die Γ-Funktion

Die **Γ-Funktion** ist als uneigentliches Integral definiert. Ihre Bedeutung liegt u.a. darin, dass sie die Fakultäten interpoliert.

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

Es kann gezeigt werden, dass dieses uneigentliche Integral für $x > 0$ existiert.

$$\Gamma(1) := \int_0^\infty e^{-t}\, dt = 1$$

mit partieller Integration

$$\Gamma(2) := \int_0^\infty t \cdot e^{-t}\, dt = [-(t+1) \cdot e^{-t}]_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(3) := \int_0^\infty t^2 \cdot e^{-t}\, dt = [-(t^2 - 2t + 2) \cdot e^{-t}]_0^\infty = 2$$

Herleitung einer Rekursionsformel für $\Gamma(x)$ mit partieller Integration

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t}\, dt$$

$$= [-t^{x-1} \cdot e^{-t}]_0^\infty - (x-1)\int_0^\infty t^{x-1} \cdot (-e^{-t})\ dt = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)$$

$f\,'(t) = e^{-t} \quad f(t) = -e^{-t}$
$g(t) = t^{x-1} \quad g'(t) = (x-1)t^{x-2}$

Damit gilt die Rekursionsformel:

$$\boxed{\Gamma(x) = (x-1) \cdot \Gamma(x-1)}$$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$
$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6$

Allgemein:
$\Gamma(n) = (n-1)!$