

Integralrechnung

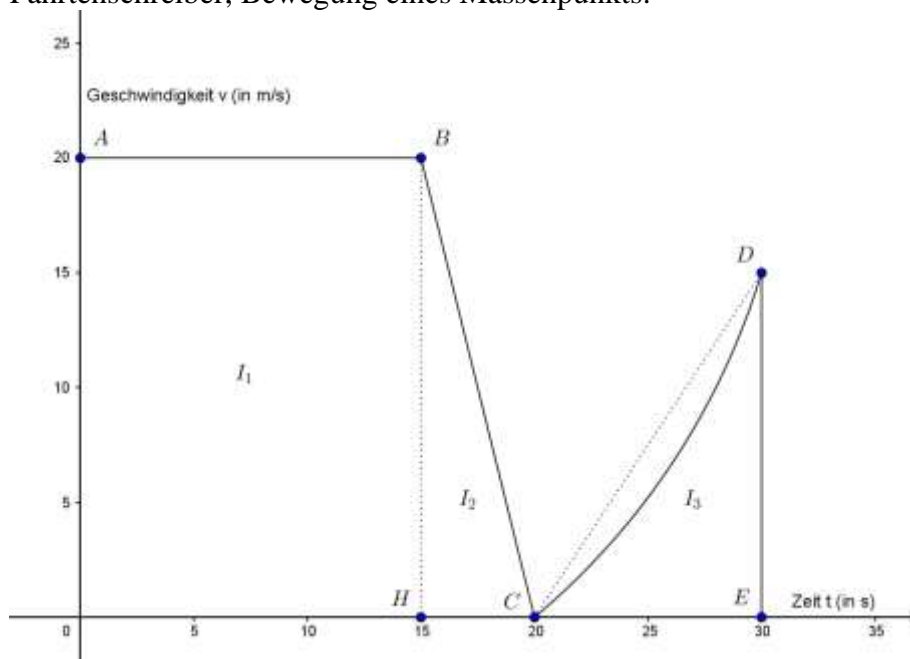
1. Einleitung

Bei Anwendungen kann die gesuchte Grösse häufig als Flächeninhalt unter einer Kurve gedeutet werden.

Beispiele:

1.

Fahrtenschreiber, Bewegung eines Massenpunkts:



Anhand des abgebildeten Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms kann die im Zeitintervall von 0s bis 20s die zurückgelegte Strecke bestimmt werden.

Im Zeitintervall von 0s bis 15s wird die Strecke $s_1 = 15 \cdot 20 = 300$ (in m) zurückgelegt (entspricht dem Inhalt I_1 des Rechtecks OHBA).

Zwischen 15s und 20s beträgt die Durchschnittsgeschwindigkeit 10 m/s, es wird also die Strecke $s_2 = 5 \cdot 10 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 = 50$ zurückgelegt (entspricht dem Inhalt I_2 des Dreiecks HCB).

Der Teilstrecke s_3 entspricht der Inhalt I_3 , des durch den Bogen begrenzten Gebiets CED, dessen Inhalt durch die Fläche eines Dreiecks nach oben abgeschätzt werden:

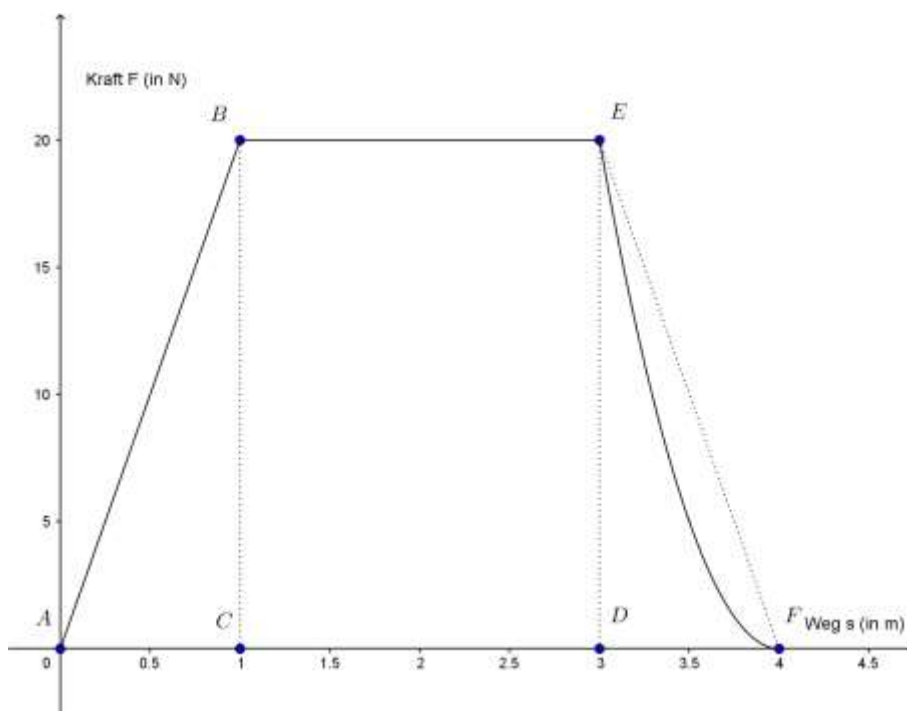
$$I_3 < \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 15 = 75.$$

Insgesamt wurden etwa $s \approx 300 + 50 + 75 = 425$ m zurückgelegt.

2.

Mechanische Arbeit

Das Problem, bei gegebener Kraftfunktion die mechanische Arbeit längs des Weges zu berechnen



Anhand des abgebildeten Kraft-Weg-Diagramms kann die verrichtete Arbeit W näherungsweise bestimmt werden.

Für $0 \leq s < 1\text{m}$ gilt: $W_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 = 5$ (in J) (entspricht dem Inhalt des Dreiecks)

Für $1 \leq s < 3\text{m}$ gilt: $W_2 = 20 \cdot 2 = 40$ (in J) (entspricht dem Inhalt des Rechtecks)

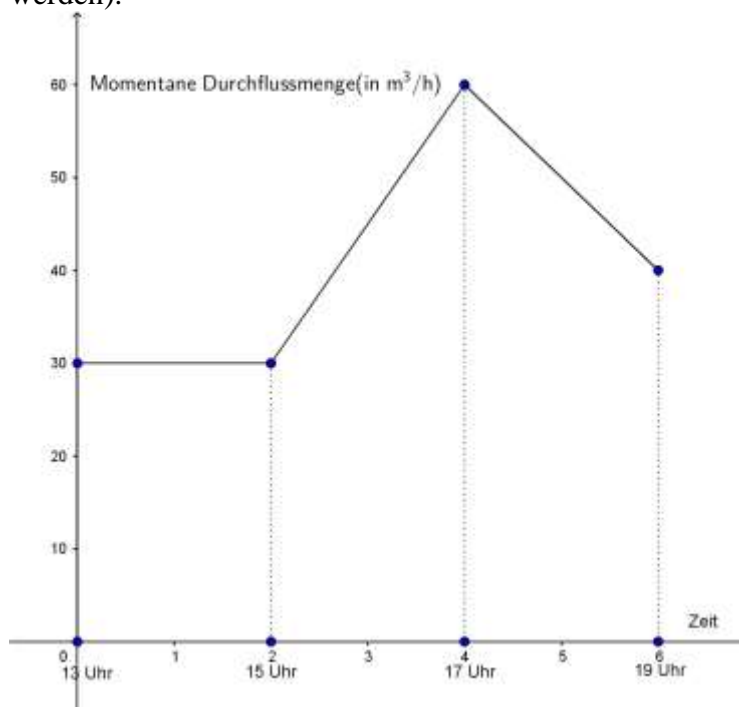
Für $3 \leq s < 4\text{m}$ gilt: $W_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 1 \approx 7$ (in J) (entspricht ungefähr $\frac{2}{3}$ vom Inhalt des Dreiecks)

Gesamte Arbeit $W_1 + W_2 + W_3 \approx 52\text{ J}$

3.

Durchflussmenge einer Ölpipeline

In der Abbildung ist für die angegebenen Zeiten die momentane Durchflussmenge dargestellt (diese kann an der Messstelle mit Hilfe eines im Rohr befestigten Propellers bestimmt werden).



Die zwischen 13 Uhr und 19 Uhr geförderte Menge Erdöl kann durch den Flächeninhalt dargestellt.

Die beiden folgenden Probleme können ebenfalls mit Hilfe der Integralrechnung gelöst werden:

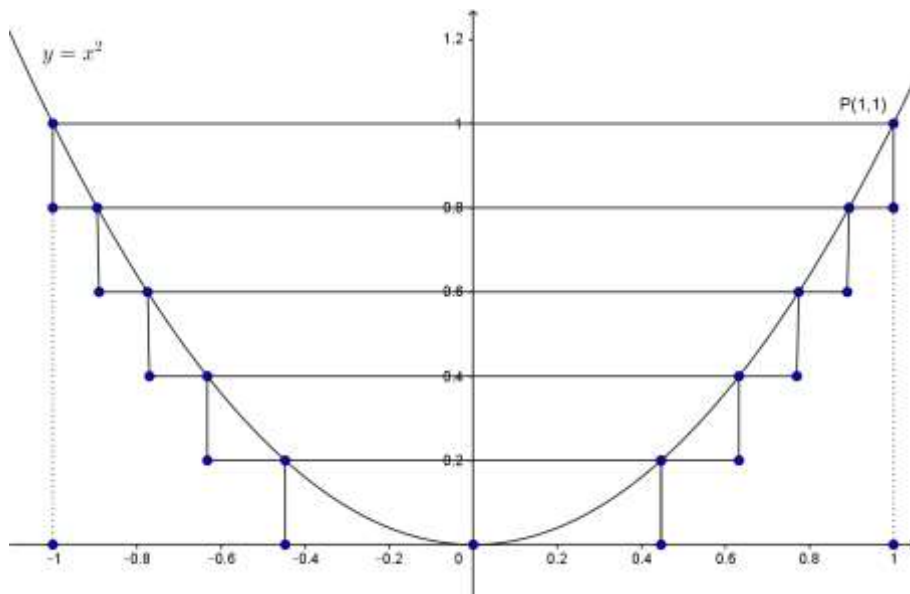
- Länge eines Kurvenbogens.
Das Problem, die Länge des Kurvenbogens einer Kurve $y = f(x)$ im Intervall $[a, b]$ zu berechnen
- Volumen eines Körpers
Das Problem, den Inhalt eines Körpers mit bekannter Querschnittfläche zu berechnen.

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass alle diese verschiedenen Probleme mit derselben Idee gelöst werden können. Ausserdem ergibt sich mit dem Hauptsatz ein überraschender Zusammenhang mit der Differentialrechnung.

Das folgende Beispiel illustriert die grundlegende Idee:

Beispiel:

Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ und die Gerade $y = 1$ begrenzen ein Gebiet, welches bei Rotation um die y -Achse einen Rotationskörper erzeugt. Wie gross ist der Inhalt V dieses sogenannten Paraboloids?



Das Paraboloid wird näherungsweise durch den äusseren Treppenkörper ersetzt, der aus n zylindrischen Scheiben der Höhe $h = \frac{1}{n}$ besteht. Zu den n Scheiben gehören dann die Radien $\sqrt{h}, \sqrt{2h}, \sqrt{3h}, \dots, \sqrt{nh}$.

Für den Inhalt des Treppenkörpers gilt dann:

$$\begin{aligned} V_n &= \pi h^2 + 2\pi h^2 + 3\pi h^2 + \dots + n\pi h^2 = \pi h^2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \pi h^2 \cdot \sum_{k=1}^n k = \pi \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

Bekanntlich (\rightarrow Kapitel Folgen) gilt für die Summe der n ersten natürlichen Zahlen:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

und damit

$$V_n = \pi \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n \cdot (n+1) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

Mit wachsender Scheibenzahl n kommt V_n schliesslich dem Wert $\frac{\pi}{2}$ beliebig nahe.

$$\text{Das Volumen } V \text{ ergibt sich als Grenzwert } V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Das Volumen des Paraboloids ist also gerade halb so gross wie das Volumen des umschriebenen Zylinders.