

## 4. Der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung

### Hauptsatz (1. Form)

Für jede im Intervall  $[a, b]$  stetige Funktion  $f$  ist die Integralfunktion mit

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

differenzierbar und es gilt:

$$F_a'(x) = f(x) \text{ für } x \in [a, b]$$

das heisst: Die Integralfunktion  $F_a$  ist eine Stammfunktion von  $f$  oder

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$$

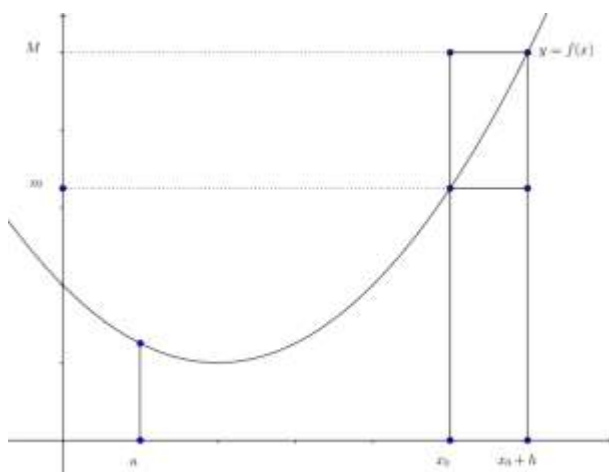


**I. Newton (1642-1727)**



**G.F. Leibniz (1646-1716)**

Beweis des Hauptsatzes unter der zusätzlichen Voraussetzung:  $f(x) \geq 0$



Sei  $m$  das Minimum,  $M$  das Maximum der stetigen Funktion  $f$  im Intervall  $[x_0, x_0 + h]$ .

Für die Integralfunktion  $F_a(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$  gilt dann die folgende Abschätzung:

$$mh \leq F_a(x_0 + h) - F_a(x_0) \leq Mh \quad \text{Division durch } h \neq 0$$

$$m \leq \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq M \quad \text{Grenzübergang}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} m \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x_0 + h) - F_a(x_0)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} M \quad f \text{ ist stetig}$$

$$f(x_0) \leq F'_a(x_0) \leq f(x_0)$$

$$F'_a(x_0) = f(x_0) \quad F_a \text{ ist eine Stammfunktion von } f \text{ auf } [a, b]$$

Das Problem der Differentialrechnung: (Ableiten, Derivation)

Gegeben ist eine Funktion  $F$ , gesucht ist die 1. Ableitung  $F' = f$

Die Integralrechnung ("Aufleiten", Antiderivation)  
ist das Umkehrproblem der Differentialrechnung:

Mit dem Hauptsatz in der 1. Form ergibt sich nun ein einfaches Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Die Idee wird zunächst am folgenden Beispiel erläutert:

Ist etwa  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$  zu berechnen, so betrachte man die zugehörige Integralfunktion

$$F_0(x) = \int_0^x \sin x \, dx.$$

$F(x) = -\cos x$  ist eine Stammfunktion des Integranden.

$F_0$  ist nach dem Hauptsatz (1. Form) eine Stammfunktion von  $f$ .

$F_0$  unterscheidet sich also von einer beliebigen Stammfunktion  $F$  des Integranden  $f$  höchstens in einer Konstanten, d.h. es gilt:

$$F_0(x) = -\cos x + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Die Konstante  $c$  ist dadurch bestimmt, dass an der unteren Grenze  $F_0(0) = 0$  ist:

$$F_0(0) = -\cos 0 + c \quad \text{und damit } c = \cos 0 = 1.$$

Wegen  $F_0(x) = -\cos x + 1$  folgt

$$F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Überträgt man das Vorgehen auf den allgemeinen Fall so erhält man den

### Hauptsatz (2. Form)

Ist  $F$  eine Stammfunktion der im Intervall  $[a, b]$  stetigen Funktion  $f$ , dann gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Die Berechnung von bestimmten Integralen besteht damit aus zwei Schritten:

1. Es ist zum Integranden  $f$  eine beliebige Stammfunktion  $F$  zu suchen.
2. Es ist die Differenz der Funktionswerte von  $F$  an oberer und unterer Grenz zu bilden.

Beweis des Hauptsatzes (2. Form)

Die Integralfunktion  $F_a(x) = \int_a^x f(t) \, dt$  ist eine Stammfunktion von  $f$ . Sie unterscheidet sich

von einer beliebigen Stammfunktion  $F$  von  $f$  höchstens in einer Konstanten  $c$ , d.h. es gilt:

$$F_a(x) = F(x) + c$$

Da  $F_a$  an der unteren Grenze  $a$  verschwindet gilt:

$$F_a(a) = F(a) + c = 0 \quad \text{und damit } c = -F(a) \quad \text{oder also } F_a(x) = F(x) - F(a)$$

An der oberen Grenze  $x = b$  erhält man schliesslich

$$F_a(b) = \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \quad \square$$

Bemerkungen:

Für Differenz  $F(b) - F(a)$  schreibt man zur Abkürzung

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

Die Stammfunktion kann durch eine beliebige andere Stammfunktion ersetzt werden, denn eine allfällige Konstante wird an der oberen Grenze addiert und an der unteren wieder subtrahiert.

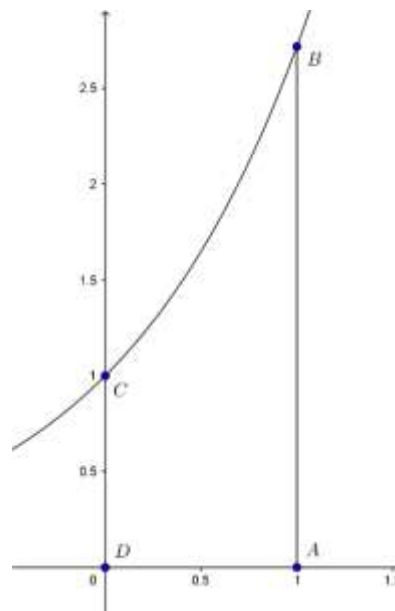
Beispiele:

$$\int_0^1 e^x dx = ?$$

$F(x) = e^x$  ist eine Stammfunktion von  $f(x) = e^x$

$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

Das von den Punkten ABCD begrenzte Gebiet hat also den Inhalt  $e - 1$ .



Bemerkung:

Nicht jedes bestimmte Integral muss mit dem Hauptsatz berechnet werden. Eine geometrische Interpretation kann allenfalls wie im folgenden Beispiel die Berechnung vereinfachen:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi r^2}{4} \quad \text{Inhalt eines Viertelkreises mit Radius } r$$

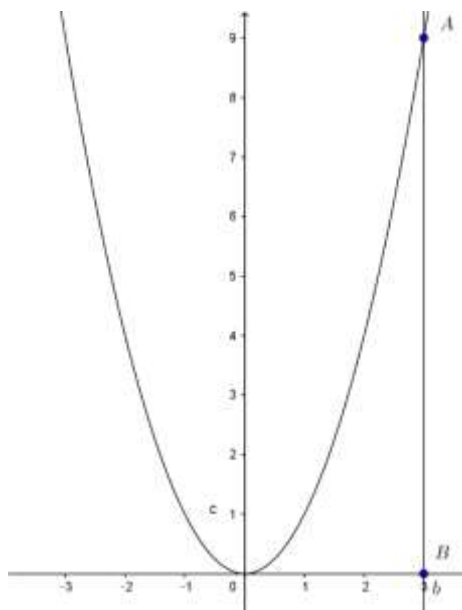
Ist der Integrand etwa eine lineare Funktion, dann ist die Berechnung eines bestimmten Integralen u.U. nicht zweckmässig. Oft führt eine elementargeometrische Berechnung schneller zum Ziel (Inhalt von Dreiecken, Trapezen).

Aufgabe:

$b > 0$  ist so zu bestimmen, dass die Fläche zwischen der Parabel  $y = x^2$ , der  $x$ -Achse und der Geraden  $x = b$  den Inhalt 9 hat.

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^b = \frac{1}{3} b^3 = 9$$

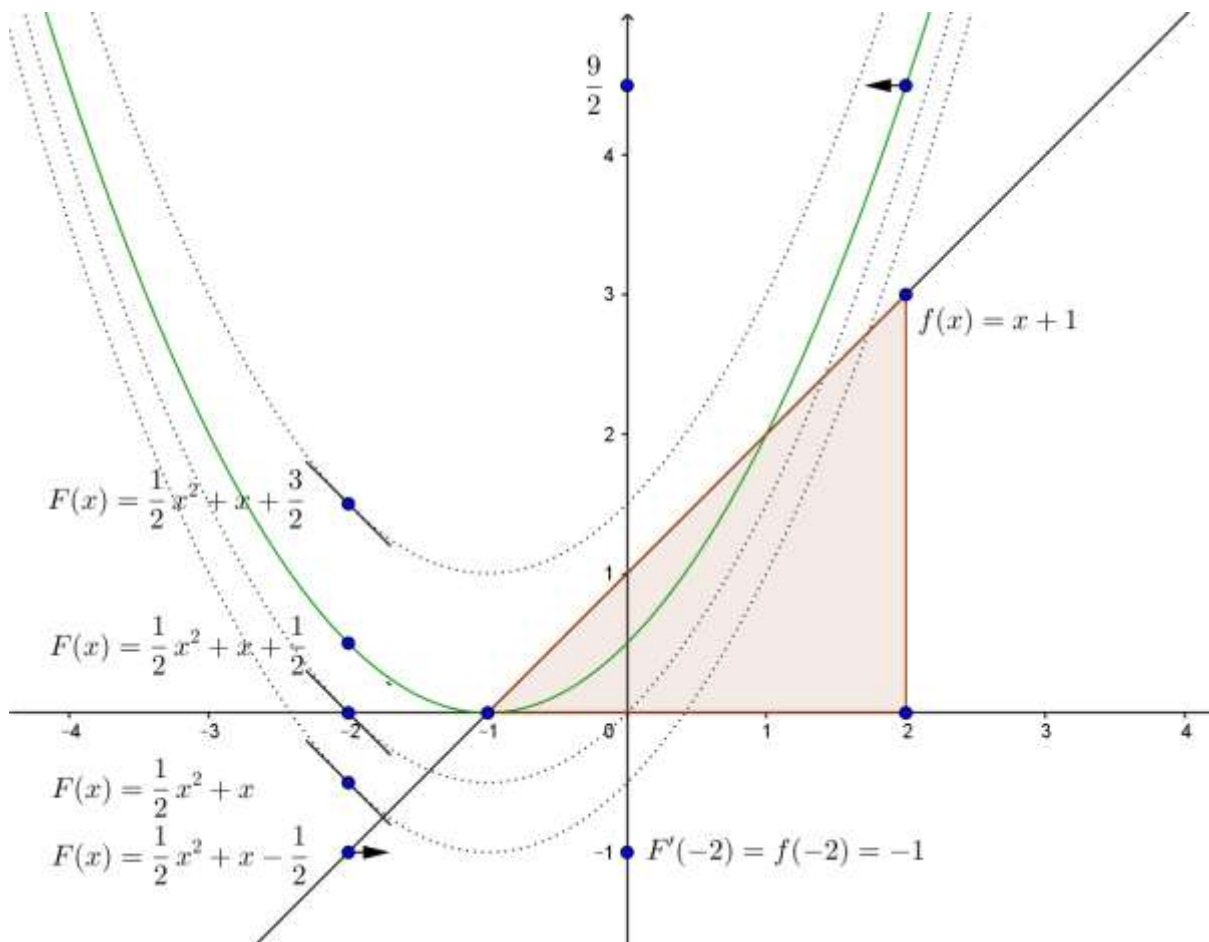
$$b = 3$$



Ergänzungen:

1.

Die Aussage des Hauptsatzes in der 1. Form kann am folgenden einfachen Beispiel illustriert werden:



Die Aufgabe das bestimmte Integral  $\int_{-1}^2 (x+1) dx$  zu berechnen (geometrisch: Inhalt des

gefärbten Dreiecks) kann nach dem Hauptsatz wie folgt gelöst werden:

Zunächst ist zum Integranden  $f$  eine Stammfunktion  $F$  zu suchen:

In der Skizze sind dazu 4 verschiedene Stammfunktionen von  $f$  dargestellt. Da ihre Ableitungen übereinstimmen, haben ihre Graphen gleiche Tangentensteigungen, dargestellt an der Stelle  $-2$ , wo die Ableitung  $f(-2) = -1$  beträgt. Massgebend ist nun die Stammfunktion, die an der unteren Grenze  $-1$  den Wert  $0$  hat, also  $F_{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ . Der Wert des bestimmten Integrals stimmt mit  $F_{-1}(2) = \frac{9}{2}$  überein.

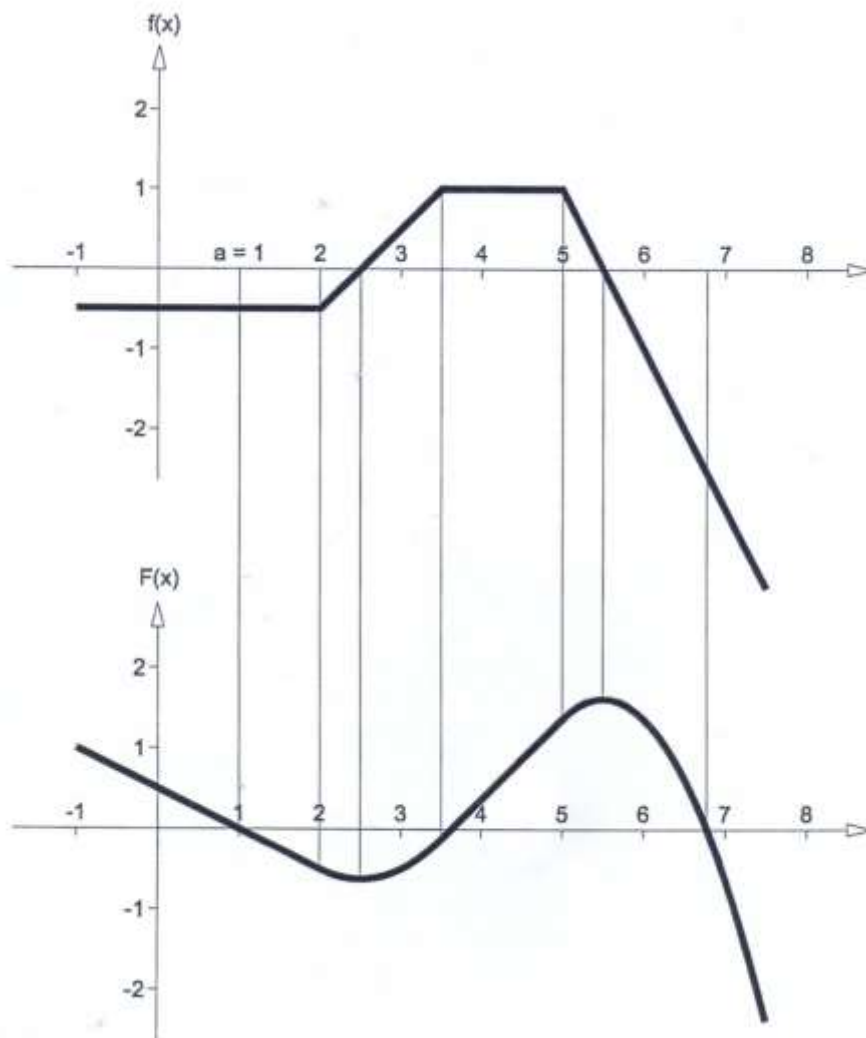
Nach der 2. Form des Hauptsatzes kann der Wert des bestimmten Integrals auch berechnet werden, indem man für eine beliebige Stammfunktion  $F$  z.B.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$  die Differenz der Funktionswerte  $F(2) - F(-1) = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$  bestimmt („Flächenzuwachs“).

Bemerkung:

Da  $f(-1) = 0$  haben die Parabeln als Graphen der Stammfunktionen den Scheitel an der Stelle  $-1$ .

2.

Der Hauptsatz bedeutet auch, dass durch Integration aus stetigen Funktionen differenzierbare Funktionen entstehen. Integration hat also - wie das folgende Beispiel zeigt - eine glättende Wirkung.



ac