

5. Integralregeln

Die folgenden Regeln vereinfachen die Berechnung bestimmter Integrale. Sie lassen sich mit der Definition des bestimmten Integrals oder dem Hauptsatz begründen.

1. Konstantenregel:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Ein konstanter Faktor darf vor das Integralzeichen geschrieben werden. Multiplikation mit einer Konstanten und Integration sind also vertauschbar.

Beispiel:

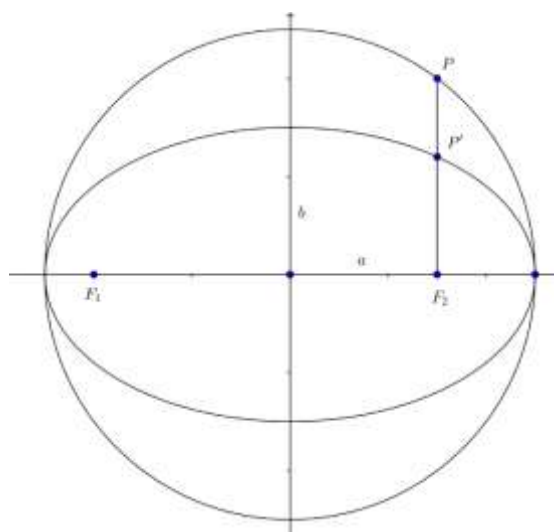
$$\int_0^1 2 \cdot e^x dx = 2 \cdot \int_0^1 e^x dx = 2 \cdot (e - 1)$$

Beispiel:

Inhalt der Ellipse

Die Ellipse kann als normalaffines Bild eines Kreises aufgefasst werden:

$$A = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi ab$$



2. Summenregel:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (2)$$

Integration und Summation bzw. Differenz sind vertauschbar.

$$\int_1^3 (2x^2 - 3x + 5) dx - \int_1^3 (-x^2 - 3x + 5) dx = \int_1^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^3 = 26$$

Multiplikation und Integration sind hingegen nicht vertauschbar und das Integral des Kehrwerts einer Funktion ist nicht gleich dem Kehrwert des Integrals der Funktion.

3. Additivität des Integrals

Ist $c \in [a, b]$ dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (3)$$

Das bestimmte Integral war bisher unter der Voraussetzung $a < b$ definiert. In Übereinstimmung mit der Anschauung erweitern wir die Definition für $a \geq b$:

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (4) \text{ und wie es der Hauptsatz nahelegt}$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx \quad (5)$$

d.h. beim Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen.

Tipp: (5) gibt die Möglichkeit, unliebsame Minuszeichen „zum Verschwinden“ zu bringen.

Beispiel:

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = \cos x \Big|_\pi^0 = 2$$

Mit den Definitionen (4) und (5) gilt die Regel (3) für beliebige reelle Zahlen a , b , und c .

6. Integrationstechniken

Nach dem Hauptsatz ist die Berechnung bestimmter Integrale einfach, wenn eine Stammfunktion des Integranden bekannt ist. Bei der Suche nach einer Stammfunktion können folgende Techniken helfen:

1.

Grundintegrale in Formeln und Tafeln
speziell: Anwendungen der Potenzregel

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

Wurzeln als Potenzen mit rationalen Exponenten darstellen

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \quad x \neq 0 \quad \text{Ausnahmefall!}$$

2.

Kommt im Integranden ein Bruch vor, so wird man nach Möglichkeit dividieren!

$$\int \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2} dx = \int \left(x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| + \frac{1}{x} + c \quad x \neq 0$$

3.

Einfache zusammengesetzte Integranden (Gegenstück zur Kettenregel)

Beispiele:

wegen $(\sin x)' = \cos x$ gilt $\int \cos x dx = \sin x + c$

wegen $(\sin(2x))' = 2 \cdot \cos(2x)$ gilt:

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + c$$

oder allgemein:

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) + c$$

wegen $(e^x)' = e^x$ gilt: $\int e^x dx = e^x + c$

wegen $(e^{-x})' = -e^{-x}$ gilt: $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + c$

analog:

$$\int (3x-2)^{10} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-2)^{11}}{11} + c$$

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} + c$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$$

$$\int 2^x dx = \int e^{x \cdot \ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot e^{x \cdot \ln 2} + c = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x + c$$

allgemein:

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x dx$$

$$\int_0^{\ln 4} (4e^x - e^{2x}) dx = \left(4e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right) \Big|_0^{\ln 4}$$

$$\int \frac{4 - e^x}{e^x} dx = 4 \int (e^{-x} - 1) dx = -4e^{-x} - x + c$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x - 1} dx = \int \frac{x^2 - 1 + 2}{x - 1} dx = \int \left(x + 1 + \frac{2}{x - 1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x - 1| + c \quad x \neq 1$$

4.

Logarithmische Integration

Nach der Kettenregel gilt: $(\ln(x^2 + 1))' = \frac{2x}{x^2 + 1}$ oder also $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \ln(x^2 + 1) + c$

Im Zähler steht gerade die Ableitung des Nenners. Die Verallgemeinerung dieser Idee führt auf:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)| + c \quad g(x) \neq 0 \quad \text{sogenannte } \mathbf{\text{logarithmische Integration}}$$

weitere Beispiele:

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln(e^x + 1) + c$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c \quad \sin x \neq 0$$

In einigen Fällen ist eine Korrektur nötig:

$$\int \frac{dx}{2 + 3x} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{3 dx}{2 + 3x} = \frac{1}{3} \cdot \ln|2 + 3x| + c \quad x \neq -\frac{2}{3}$$

$$\int \frac{\cos x}{3 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cdot \cos x}{3 + 2 \sin x} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln(3 + 2 \sin x) + c$$

Später werden besprochen:

Substitutionsregel als Gegenstück zur Kettenregel

Partielle Integration als Gegenstück zur Produktregel

Partialbruchzerlegung: Integration von gebrochen rationalen Funktionen

Es gibt einfache Integranden, für die keine aus elementaren Funktionen zusammengesetzte

Stammfunktion existiert z.B. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

Es gibt also bestimmte Integrale, die nicht mit dem Hauptsatz berechnet werden können. In diesen Fällen ist man auf

Näherungsverfahren \rightarrow Numerische Integration Analysis 2 angewiesen.