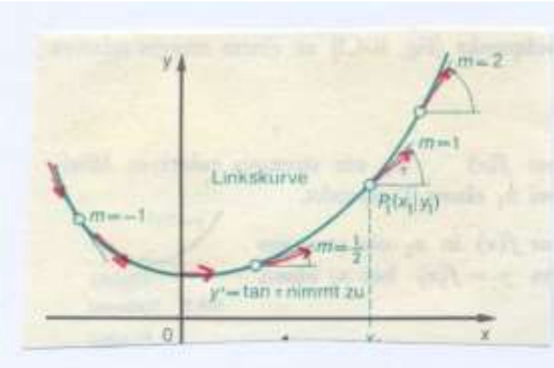
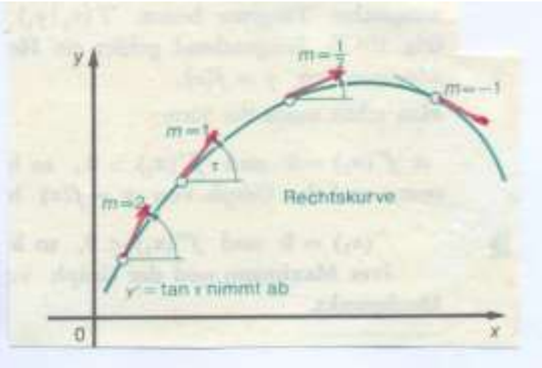
3. Krümmungsverhalten, Wendepunkte





In einer Linkskurve verläuft der Graph oberhalb der Tangente, die Tangenten drehen im Gegen-Uhrzeigersinn, die Tangentensteigungen nehmen zu.

In einer Rechtskurve verläuft der Graph unterhalb der Tangente, die Tangenten drehen im Uhrzeigersinn, die Tangenten-steigungen nehmen ab.

Definition:
Der Graph der Funktion f ist in einem Intervall I rechtsgekrümmt (linksgekrümmt) genau dann, wenn die Tangentensteigung in I monoton abnimmt (zunimmt).

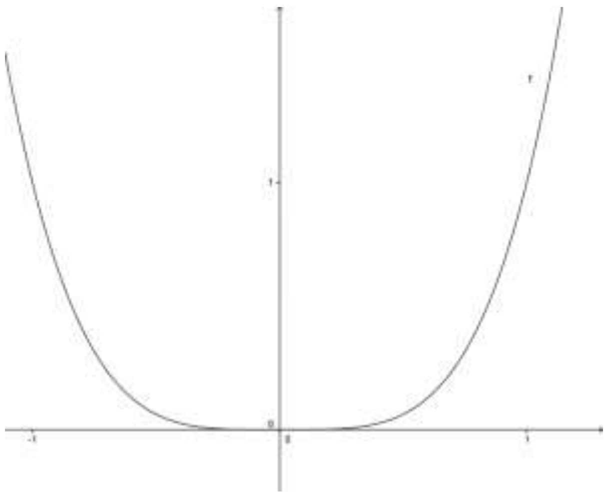
Da das Wachstumsverhalten der Tangentensteigung f ' durch die 1. Ableitung von f ' also von f '' beschrieben wird folgt nach Satz 1

Satz 3:
Ist $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$) in I dann hat der Graph von f in I eine **Linkskurve** (**Rechtskurve**).

Im Spezialfall der quadratischen Funktion $f(x)=ax^2+bx+c$ ist $f''(x)=2a$ und es ergibt sich erneut:

Für a > 0 ist die Parabel linksgekrümmt (nach oben geöffnet), für a < 0 rechtsgekrümmt (nach unten geöffnet).

Bemerkung:
Der Graph der Funktion $f(x)=x^4$ ist linksgekrümmt,
obwohl $f''(x)\geq 0$, denn es ist $f''(0)=0$.
Die Bedingung von Satz 3 ist also hinreichend aber
nicht notwendig.



Da Hochpunkte in Rechtskurven und Tiefpunkte in Linkskurven liegen ist das folgende Kriterium anschaulich klar:

Satz 4:
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum (lokales Maximum).

Beweis:
Aus $f''(x_0) > 0$ und der Stetigkeit von f '' ist die 2. Ableitung auch in einer gewissen Umgebung von x_0 positiv, also die 1. Ableitung monoton wachsend. Wegen $f'(x_0) = 0$ wechselt damit die 1. Ableitung an der Stelle x_0 das Vorzeichen von - nach + woraus die Behauptung. folgt.

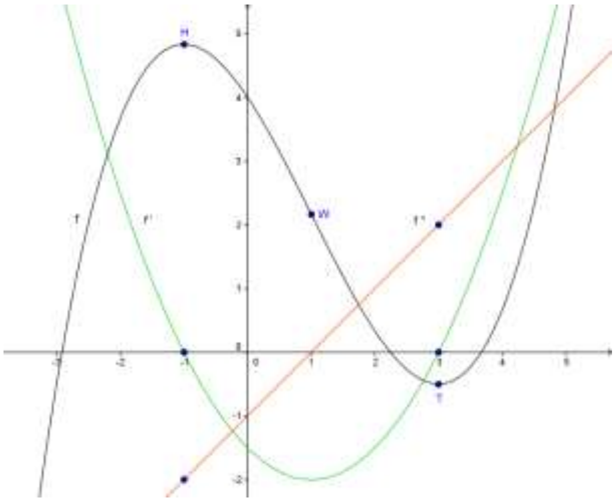
Aufgabe:
Es ist das Krümmungsverhalten der Funktion f: $f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 24\right)$ untersuchen. An welchen Stellen befinden sich die Extrema?

$f'(x) = \frac{1}{6}\left(3x^2 - 6x - 9\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x - 3\right)$

$\quad = \frac{1}{2}(x-3)(x+1)$

$f''(x) = x - 1$

Für x < 1 ist $f''(x) < 0$, der Graph von f hat also für x < 1 eine Rechtskurve.
Für x > 1 ist $f''(x) > 0$, der Graph von f hat also für x > 1 eine Linkskurve.



An der Stelle x = -1 gilt: $f'(-1) = 0$. Da $f''(-1) = -2 < 0$ ist in einer Umgebung von - 1 der Graph G_f rechtsgekrümmt also liegt ein Hochpunkt vor: $H\left(-1, \frac{29}{6}\right)$
An der Stelle x = 3 gilt: $f'(3) = 0$. Da $f''(3) = 2 > 0$ ist in einer Umgebung von 3 der Graph G_f linksgekrümmt, also liegt ein Tiefpunkt vor: $T\left(3, -\frac{1}{2}\right)$

Da der Graph von f für x < 1 eine Rechtskurve, für x > 1 eine Linkskurve hat, wechselt an der Stelle x = 1 der Krümmungssinn, an dieser Stelle liegt damit ein sogenannter **Wendepunkt** $W\left(1, \frac{13}{6}\right)$ vor.

Aufgabe:
Gesucht ist die Gleichung der Tangente im Wendepunkt.

Lösung:
Wegen $f'(1) = -2$ kann die Tangentengleichung in der folgenden Form angesetzt werden:
t: $y = -2x + q$
q ist durch die Bedingung bestimmt, dass die Koordinaten des Wendepunkts die Tangentengleichung erfüllen:
$\frac{13}{6} = -2 + q$ $\quad q = \frac{25}{6}$ $\quad$ t: $y = -2x + \frac{25}{6}$

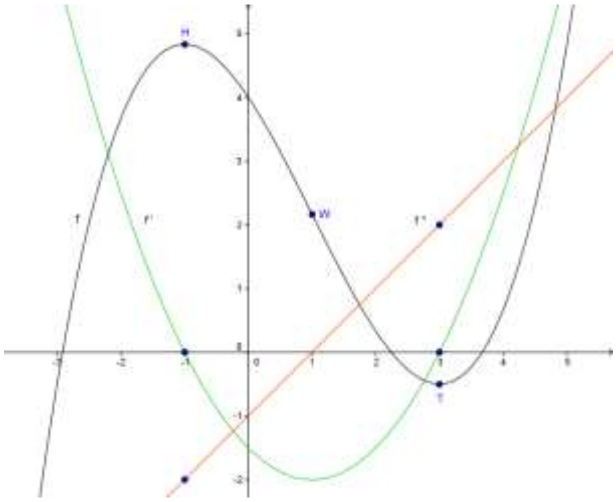
Übungsaufgabe:
Gesucht ist der Steigungswinkel der Wendetangente t des Graphen der Funktion f mit der Gleichung
$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Lösung:
$f'(x) = x^2 - 6x + 5$ $\quad f''(x) = 2x - 6 = 0 \quad f'''(x) = 2 \neq 0$
$x = 3$, $f(3) = -1$ und damit W(3,-1)
$f'(3) = -4$ $\quad$ t: y = -4x + 11 $\quad$ tan α = - 4, $\quad$ α ≈ - 76°

Übungsaufgabe:
Find the maximum slope of the graph of $y = f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

Lösung:
$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$ $\quad f''(x) = 6 - 6x = 0$. Mit der Lösung x = 1. Die maximale Steigung ist $f'(1) = 12$ (geom.: y-Koordinate des Parabelscheitels des Graphen von f‘).

4. Wendepunkte



Die Aussagen des eben betrachteten Beispiels (siehe nebenstehende Skizze) können folgendermassen verallgemeinert werden:

Anschaulich:
Bei einem Wendepunkt geht ein Linkskurvenbogen in einen Rechtskurvenbogen über oder umgekehrt. Wendepunkte zeichnen sich aber auch dadurch aus, dass dort die Tangentensteigung minimal bzw. maximal ist.
Deshalb definieren wir:

Definition:
Der Graph einer Funktion f hat an einer Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn die 1. Ableitung f ' an der Stelle x_0 ein Extremum hat.

Wegen dieser Extremaleigenschaft von f ´ lassen sich die Sätze 2 und 4 unmittelbar übertragen:

Satz 5:
Ist an einer Stelle x_0 $f''(x_0)=0$ und wechselt die 2. Ableitung f '' bei x_0 das Vorzeichen, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Satz 6:
Ist $f''(x_0)=0$ und $f'''(x_0)\neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung:
Die Bedingung für die 3. Ableitung ist wesentlich. Sie garantiert nämlich, dass die 2. Ableitung an der Stelle x_0 das Vorzeichen wechselt.

Zur Illustration betrachten wir etwa $f(x)=x^4$. Wegen $f'''(0)=0$ ist zunächst keine Aussage möglich. Wegen $f'(x)=4x^3$ ist aber f in einer Linksumgebung von 0 monoton fallend und in einer Rechtsumgebung monoton steigend, also liegt an der Stelle 0 ein Tiefpunkt vor.

Spezialfall:
Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heisst **Terrassenpunkt** (**Sattelpunkt**).

Beispiel:
Der Graph von f(x) = x^3 hat an der Stelle 0 einen Terrassenpunkt.

Zusammenfassung

Satz 1:
Ist in einem Intervall I $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) dann ist die Funktion f im Intervall I streng monoton **steigend** (**fallend**).

Satz 2:
Wechselt die 1. Ableitung f ' an der Stelle x_0 das Vorzeichen von - nach + (von + nach -) dann hat f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum** (**lokales Maximum**) und G_f einen **Tiefpunkt** $T(x_0, f(x_0))$ (**Hochpunkt** $H(x_0, f(x_0))$).

Satz 3:
Ist $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) in I dann hat der Graph von f in I eine **Linkskurve** (**Rechtskurve**).

Satz 4:
Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), dann hat f an der Stelle x_0 ein **lokales Minimum** (**lokales Maximum**). und der Graph G_f einen **Tiefpunkt** $T(x_0, f(x_0))$ (**Hochpunkt** $H(x_0, f(x_0))$).

Satz 5:
Ist an einer Stelle x_0 $f''(x_0) = 0$ und wechselt die 2. Ableitung f '' bei x_0 das Vorzeichen, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt** $W(x_0, f(x_0))$.

Satz 6:
Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat der Graph von f an der Stelle x_0 einen **Wendepunkt** $W(x_0, f(x_0))$**.**

Umgekehrt gilt:

Satz 7:
f hat an der Stelle x_0 ein Extremum $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$

Satz 8:
Der Graph von f hat an der Stelle x_0 einen Wendepunkt $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$