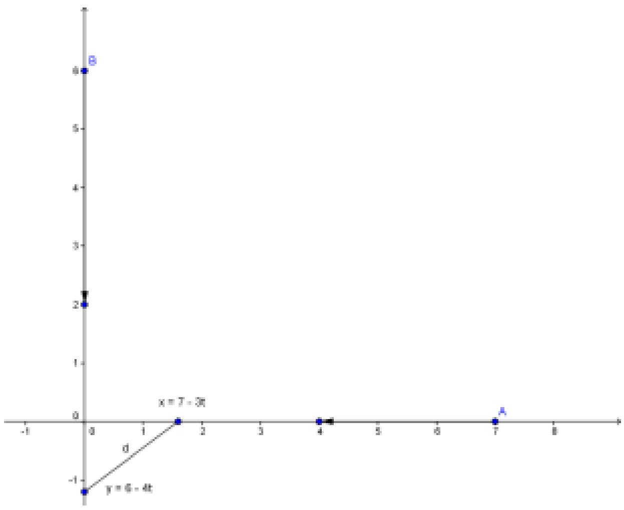
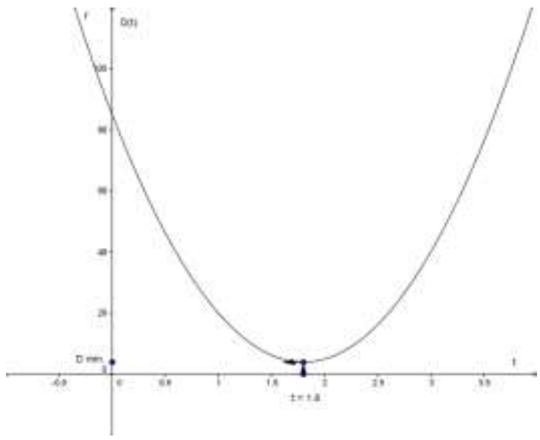
Minimaler Abstand



Zwei Massenpunkte A und B bewegen sich auf den Koordinatenachsen.
A startet zur Zeit t = 0 in (7,0) mit der Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
B startet zur Zeit t = 0 in (0,6) mit der Geschwindigkeit $\overrightarrow{v_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
Zu welcher Zeit ist der Abstand der beiden Punkte minimal?

1. Zielfunktion:
Der Abstand d ist genau dann minimal, wenn das Quadrat des Abstands $D = d^2$ minimal ist.

Abstandsquadrat $D = x^2 + y^2$



2. Nebenbedingung:
Für die x-Koordinate von A bzw. die y-Koordinate von B zur Zeit t gilt:

$x = 7 - 3t \qquad y = 6 - 4t$

3. Das Abstandsquadrat D ist damit eine Funktion von t:

$D(t) = (7 - 3t)^2 + (6 - 4t)^2 = 25t^2 - 90t + 85 \quad (*)$
4. Bestimmung des Minimums
Der Graph von D ist eine nach oben geöffnete Parabel.
$D'(t) = 2 \cdot (7 - 3t) \cdot (-3) + 2 \cdot (6 - 4t) \cdot (-4) = 50t - 90 = 0$
Der Abstand wird damit für t = $\frac{9}{5}$ minimal,
$D\left(\frac{9}{5}\right) = 4$ ist das minimale Abstandsquadrat, der minimale Abstand also $d = 2$
A befindet sich zu diesem Zeitpunkt bei Punkt $A\left(\frac{8}{5}, 0\right)$und $B\left(0, -\frac{6}{5},\right)$

Bemerkung zu (*)
Das Ausmultiplizieren kann vermieden werden, indem man die Kettenregel anwendet.

Übungsaufgabe:
Dem von der Parabel mit der Gleichung y = 4 - x^2 und der x-Achse begrenzten Parabel-segment ist ein Rechteck mit grösstem Inhalt einzubeschreiben.
Lösung: Zielfunktion: $A(x) = 2 \cdot (4x - x^3)$.Das durch den Punkt $P\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \frac{8}{3}\right)$ festgelegte Rechteck hat maximalen Inhalt.