

## 8. Nullstellen von Polynomen

Definition:

$x_0$  heisst Nullstelle der Funktion  $f \Leftrightarrow f(x_0) = 0$

Bemerkung:

An einer Nullstelle schneidet oder berührt der Graph einer Funktion die x-Achse. Das Problem, die Nullstellen eines Polynoms zu bestimmen, führt auf eine **algebraische Gleichung n. Grades**.

Bestimmung der Nullstellen in Spezialfällen:

a)

### Quadratische Auflösungsformel oder faktorisieren

Beispiel:

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

$$(x-3) \cdot (x+1) = 0 \quad x_1 = 3, x_2 = -1$$

$$f(x) = x^4 - x^2 - 12$$

b)

### Biquadratische Gleichung

Beispiel:

$$x^4 + x^2 - 12 = (x^2 - 3) \cdot (x^2 + 4) = 0 \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

oder mit einer Substitution  $z = x^2$

c) **Ausklammern!**

Beispiel:

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x \cdot (x-2) \cdot (x-4) = 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$$

Ist schon eine Nullstelle bekannt, dann kann der Grad der Gleichung um 1 reduziert werden. Es gilt nämlich der folgende

**Satz:**

Ist speziell  $x_0$  eine Nullstelle von  $f$ , dann ist  $f(x)$  durch  $(x - x_0)$  teilbar, d.h. es gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \text{ mit } \text{grad } g = \text{grad } f - 1$$

$g(x)$  kann durch Polynomdivision bestimmt werden oder einfacher mit dem sogenannten Horner Schema.

## Hornerschema

Das Hornerschema ist ein Algorithmus zur Berechnung des Funktionswerts eines Polynoms. Das folgende Beispiel illustriert die Idee:

Beispiel:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = ((2x - 3) \cdot x - 5) \cdot x + 6$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \quad -5 \quad 6 \\ \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad x_0 = 3 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad \mathbf{18} = f(3)$$

Das Hornerschema liefert zusätzlich die Darstellung

$$f(x) = (x - 3) \cdot (2x^2 + 3x + 4) + 18$$

### Das allgemeine Vorgehen.

Hornerchema für das Polynom  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  (1)

$$\begin{array}{r} a \quad b \quad c \quad d \\ \quad a_1x_0 \quad b_1x_0 \quad c_1x_0 \quad x = x_0 \\ \hline a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1 \end{array}$$

$$\text{mit } a_1 = a, b_1 = b + x_0a_1, c_1 = c + x_0b_1, d_1 = d + x_0c_1 \quad (3)$$

Behauptung:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) + d_1 \text{ mit } g(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1 \text{ und } f(x_0) = d_1 \quad (2)$$

Beweis: durch Ausmultiplizieren von (2) und Koeffizientenvergleich mit (1)

$$(x - x_0) \cdot g(x) + d_1 = (x - x_0) \cdot (a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

Koeffizient von

$$x^3: \quad a_1 = a \quad \text{wegen (3)}$$

$$x^2: \quad b_1 - a_1x_0 = b \quad \text{wegen (3)}$$

$$x^1: \quad c_1 - b_1x_0 = c \quad \text{wegen (3)}$$

$$x^0: \quad d_1 - c_1x_0 = d \quad \text{wegen (3)}$$

Ergänzung:

Mit dem vollständigen Hornerchema können zusätzlich die Ableitungen berechnet werden.

Die Darstellung (2) ist besonders nützlich, wenn eine Nullstelle von  $f$  bekannt ist:

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 7x + 6 \quad x_1 = 2 \text{ ist Nullstelle.}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad -7 \quad 6 \\ \underline{\quad 2 \quad 4 \quad -6 \quad} \quad x_1 = 2 \end{array}$$

$$1 \quad 2 \quad -3 \quad \mathbf{0} = f(2)$$

Horner liefert die Darstellung

$$f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 3)$$

Die beiden restlichen Nullstellen können z.B. mit der quadratischen Auflösungsformel oder durch Faktorisieren gefunden werden:  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -3$ . Damit gilt:

$$f(x) = (x-2) \cdot (x+3) \cdot (x-1)$$

Satz:

Ist speziell  $x_0$  eine Nullstelle von  $f$ , dann ist  $f(x)$  durch  $(x - x_0)$  teilbar, d.h.

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \text{ mit } \text{grad } g = \text{grad } f - 1$$

Aufgabe:

Das Polynom  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6$  hat die Nullstelle  $-3$ . Zerlege  $f(x)$  in Linearfaktoren.

Das Hornerschema liefert schliesslich die Darstellung

$$f(x) = 3(x+3) \cdot (x-2) \cdot (x-\frac{1}{3}) = (x+3) \cdot (x-2) \cdot (3x-1)$$

Satz:

Eine ganzzahlige Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist ein Teiler des konstanten Gliedes

Beweis für ein Polynom 3. Grades:

Voraussetzung:

$z$  sei eine ganzzahlige Nullstelle des Polynoms  $f$

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \text{ oder } -d = az^3 + bz^2 + cz \text{ durch } z \text{ dividiert}$$

$$-\frac{d}{z} = az^2 + bz + c, \text{ wo die rechte Seite nach Voraussetzung ganzzahlig ist.}$$

Übungsaufgaben:

a)

$$f(x) = x^3 - x - 6 = (x-2) \cdot (x^2 + 2x + 3)$$

Als ganzzahlige Lösungen kommen die Zahlen  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  in Frage.

Der quadratische Term kann reell nicht in Linearfaktoren zerlegt werden, da die zugehörige Diskriminante negativ ist.

b)

$$f(x) = 6x^3 - 73x^2 + 79x - 22 = (x-11) \cdot (2x-1) \cdot (2x-3)$$

Als ganzzahlige Lösungen kommen die Zahlen  $\pm 1, \pm 11$  in Frage.

c)

$c \in \mathbb{R}$  ist so zu bestimmen, dass die Gleichung  $2x^3 + x^2 - 3x + c = 0$  die Lösung  $x_1 = -1$  hat. Wie heißen die übrigen Lösungen (Wurzeln stehen lassen)?

Lösung:

$$c = -2, \quad x_{2,3} = \frac{1}{4} \cdot (1 \pm \sqrt{17})$$

Allgemein gilt (ohne Beweis):

**Fundamentalsatz der Algebra:**

Ein Polynom n-ten Grades besitzt genau n reelle oder komplexe Nullstellen und es gilt die folgende Zerlegung in Linearfaktoren:

$$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{C}$$

Folgerung:

Ein Polynom n-ten Grades hat insbesondere höchstens n reelle Nullstellen. Wie das Beispiel

$$f(x) = x^2 + 1$$

zeigt, gibt es unter Umständen überhaupt keine reellen Nullstellen.

Bemerkungen:

Es können auch zwei oder mehrere Nullstellen übereinstimmen.

Beispiel.:

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

Im Beispiel berührt die Parabel die x-Achse an der Stelle  $x=3$ .

Allgemein gilt:

Mehrfache Nullstellen sind auch Nullstellen der 1. Ableitung (Beweis mit der Produkt- und Kettenregel).

Aufgabe:

Die Tangente  $t$  an die kubische Parabel  $k: y = f(x) = x^3$  in einem beliebigen Kurvenpunkt  $P$  schneidet  $k$  in einem weiteren Punkt  $S$ . bestimme die Koordinaten von  $S$ .

Abbildung:  $x_0 = \frac{1}{2}$

Für die Steigung  $m$  der Tangente  $t$  gilt:

$$m = f'(x_0) = 3x_0^2$$

Ansatz für die Tangentengleichung:

$$t: y = 3x_0^2x + q$$

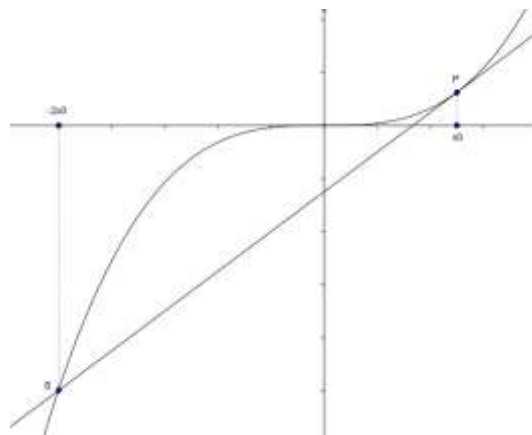
$P$  erfüllt die Tangentengleichung:

$$x_0^3 = 3x_0^2 \cdot x_0 + q \quad q = -2x_0^3$$

$$t: y = 3x_0^2x - 2x_0^3$$

Im Schnittpunkt von  $t$  und  $k$  gilt:

$$x^3 = 3x_0^2x - 2x_0^3 \text{ bzw. } x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0$$



Die doppelte Lösung  $x_0$  dieser Gleichung kann nach Horner abgespalten werden:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -3x_0^2 & 2x_0^3 & \\ & x_0 & x_0^2 & -2x_0^3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & x_0 & -2x_0^2 & 0 & \\ & x_0 & 2x_0^2 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 2x_0 & 0 & \end{array}$$

Gesuchter Schnittpunkt  $Q(-2x_0 / -8x_0^3)$

Ausblick:

Zwar gibt es für Gleichungen 3. und 4. Grades Auflösungsformeln. Sie sind aber in der Praxis kaum von Bedeutung. Wie der Mathematiker Nils Hendrik Abel bewiesen hat, gibt es keine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen von mindestens 5. Grad. In der Praxis hilft man sich mit numerischen Verfahren wie z.B. dem Newtonverfahren.