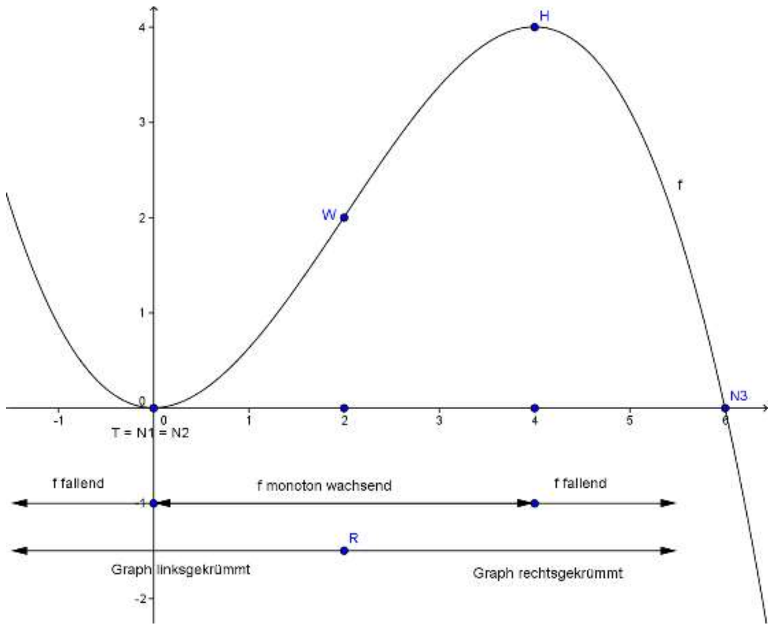
5. Diskussion von Polynomen 3. Grades

Beispiel:
$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = -\frac{1}{8}x^2(x-6)$

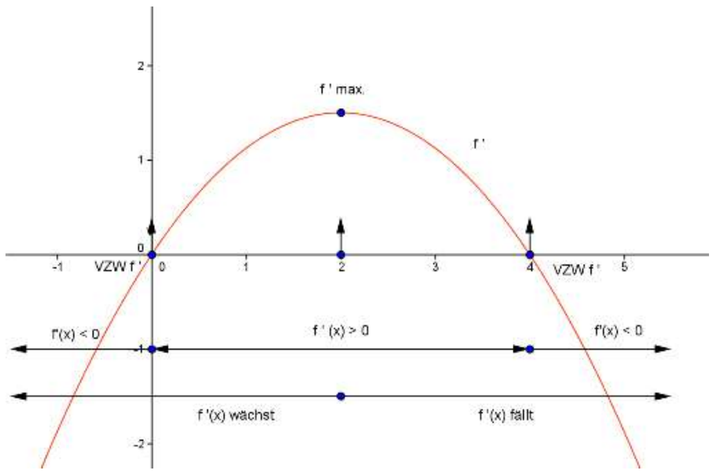


1. Ableitungen:
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{3}{8}x(4-x)$
$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}(2-x)$

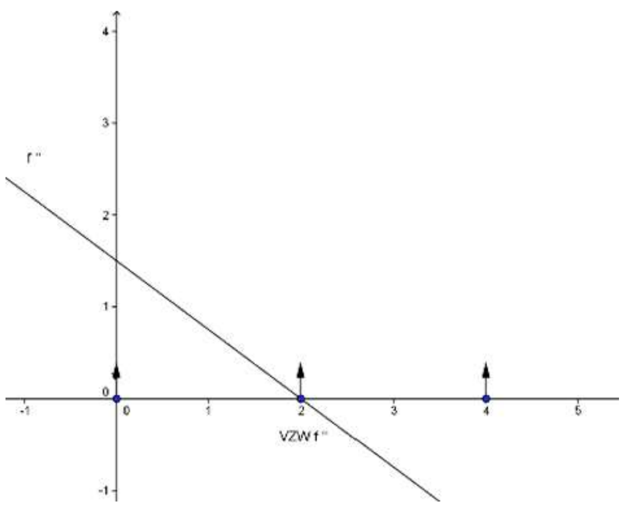
2. Nullstellen:
$f(x) = -\frac{1}{8}x^2(x-6) = 0$
$x_{1,2} = 0$, $x_3 = 6$

Es gilt allgemein:
Kommt eine Nullstelle höherer Ordnung vor (im Beispiel x = 0), dann ist sie auch Nullstelle der 1. Ableitung.

3. Extrema
$f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{3}{8}x(4-x) = 0$
x = 0 oder x = 4
$f''(0) = \frac{3}{2} > 0$
Der Graph von f hat einen Tiefpunkt T(0,0)
Variante:
Die 1. Ableitung wechselt an der Stelle 0 das Vorzeichen von
\+ nach -.
$f''(4) = -\frac{3}{2} < 0.$
Der Graph von f hat einen Hochpunkt H(4,4)
Variante:
Die 1. Ableitung wechselt an der Stelle 4 das Vorzeichen von - nach +.



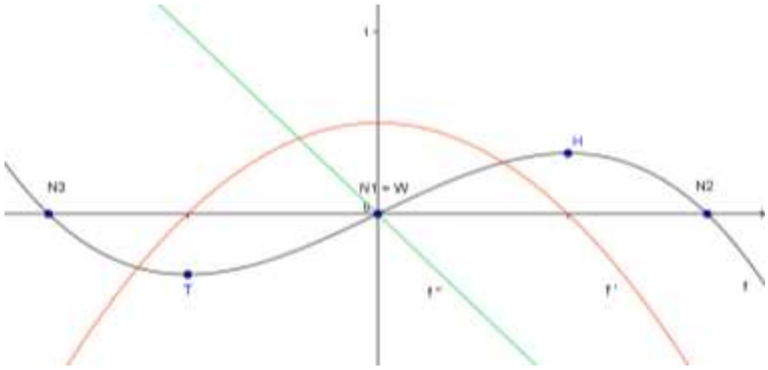
4. Wendepunkte
$f''(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}(2-x) = 0 \quad x = 2$
$f'''(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$
Der Graph von f hat an der Stelle x = 2 einen Wendepunkt W(2,2)
Variante:
Die 2. Ableitung wechselt an der Stelle x = 2 das Vorzeichen.



5. Wertetabelle:

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x - x^3)$



1. Ableitungen:

$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot (3 - 3x^2) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)$

$f''(x) = -x$

$f(x) = -1$

2. Nullstellen:

$f(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x - x^3) = \frac{1}{6} \cdot x \cdot (3 - x^2) = 0$ Ausklammern!

$x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$

3. Extrema:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2) = 0$ x = -1 oder x = 1.

Da $f''(1) = -1 < 0$ hat der Graph eine Rechtskurve, also liegt ein Hochpunkt H(1, $^1/_3$) vor.
analog zeigt man an der Stelle -1 liegt ein Tiefpunkt T(1, -$^1/_3$)

4. Wendepunkte:

An der Stelle 0 wechselt die 2. Ableitung das Vorzeichen von + nach -, d.h. eine Rechtskurve geht in eine Linkskurve über; also liegt dort ein Wendepunkt W(0,0) vor.

5. Symmetrie:

Da die Funktionswerte an den Stellen x und -x entgegengesetzt gleich sind, ist der Graph punktsymmetrisch zum Ursprung.

6. Asymptotisches Verhalten:

Das Verhalten für betragsgrosse x ist vom Term bestimmt, dessen Exponent am grössten ist.
Im Beispiel verhält sich f(x) asymptotisch wie $-x^3$.

7. Skizze: $-2 < x < 2$

Übungsaufgaben

a)

$f(x) = x \cdot (x - 9) \cdot (x - 24)$

Lösung:

3 ganzzahlige Nullstellen, ganzzahlige Extremalstellen bei x = 4 und x = 18 und ein Wendepunkt an der Stelle x = 18.

b)

$f(x) = \frac{1}{4} x \cdot (12 - x^2)$

c)

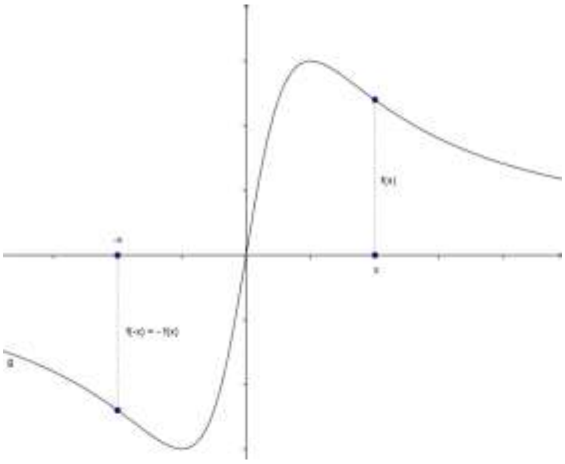
$f(x) = x^2 \cdot (3 - x)$

Symmetrieeigenschaften, ungerade (gerade Funktionen)

Der Graph einer Funktion f ist genau dann punktsymmetrisch zu dem Ursprung, wenn für alle x des Definitionsbereichs gilt: $f(-x) = -f(x)$. Funktionen mit dieser Eigenschaft heissen ungerade Funktionen.

Weitere Beispiele von ungeraden Funktionen:

$f(x) = \sin x,\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+1},\ f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$



Für **Polynomfunktionen** gilt speziell:

> **Satz**:
> Kommen in der Funktionsgleichung eines Polynoms nur ungerade Exponenten vor, dann ist der Graph zentralsymmetrisch zum Ursprung.

Beweis:
Ersetzt man x durch -x, so wechselt jeder Summand das Vorzeichen.

Ergänzende Informationen ohne Beweis

Der **Graph eines Polynoms vom 3. Grad** mit der Gleichung f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat einen Wendepunkt mit den Koordinaten $x_w = -\frac{b}{3a}$ und $y_w = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$. Der Graph ist **zentralsymmetrisch zum Wendepunkt.**

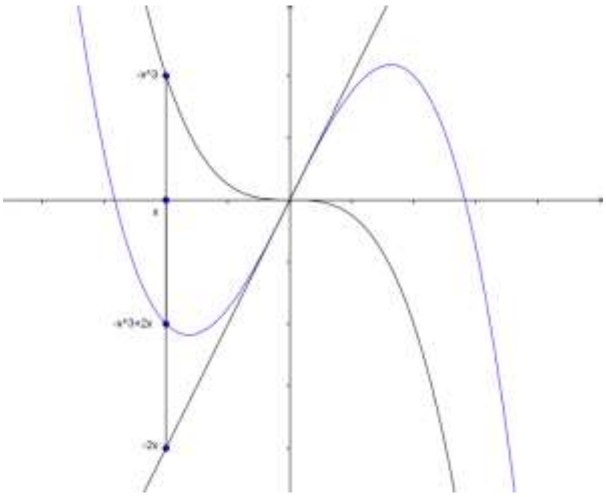
Führt man ein neues Koordinatensystem ein, dessen Ursprung im Wendepunkt liegt, so erhält man als Gleichung der Kurve bezüglich des neuen Koordinatensystems:

$$\bar{y} = a\bar{x}^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\bar{x}$$

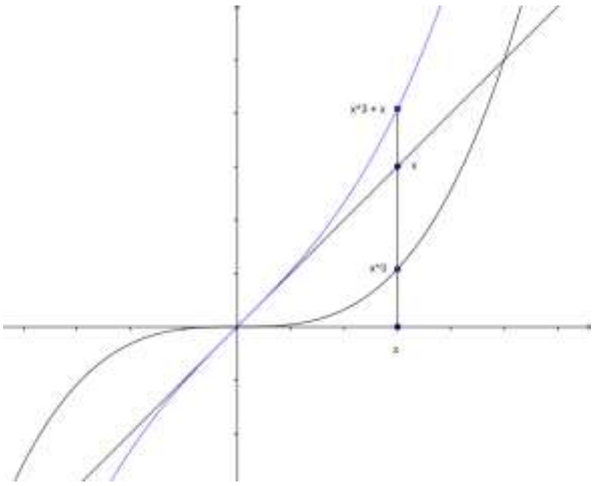
Der Graph eines Polynoms vom 3. Grad ist also als Überlagerung einer kubischen Parabel mit der Gleichung $\bar{y} = a\bar{x}^3$ und einer Geraden mit der Gleichung $\bar{y} = \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\bar{x}$ aufgefasst werden.

Die verschiedenen Typen des Kurvenverlaufs sind in den folgenden Beispielen dargestellt:
Die Vorzeichen der einzelnen Summanden sind mit Berücksichtigung des Vorzeichens zu addieren.

a < 0
Beispiel: $f(x) = -x^3 + 2x$



a > 0
Beispiel: $f(x) = x^3 + x$



Der Graph eines Polynoms vom 3. Grad verläuft also von links unten nach rechts oben (oder von links oben nach rechts unten) und schneidet wegen der Stetigkeit an mindestens einer Stelle die x-Achse. Ausserdem ist zu erkennen, dass bezüglich der Anzahl Nullstellen gilt:

> Satz:
> Ein Polynom 3. Grades hat mindestens eine oder höchstes drei reelle Nullstellen.