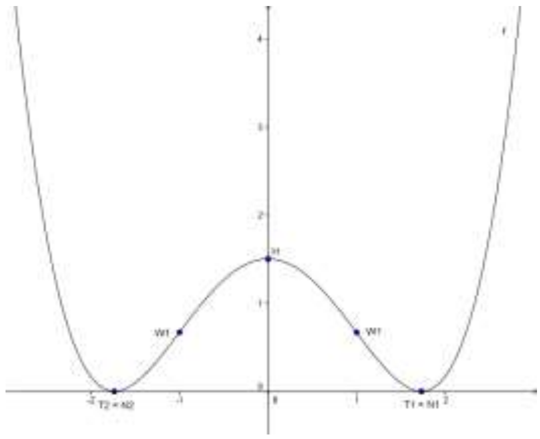
6. Diskussion von Polynomen 4. Grades

Beispiel:

$$f(x)=\frac{1}{6}(x^4-6x^2+9)=\frac{1}{6}\left(x^2-3\right)^2$$

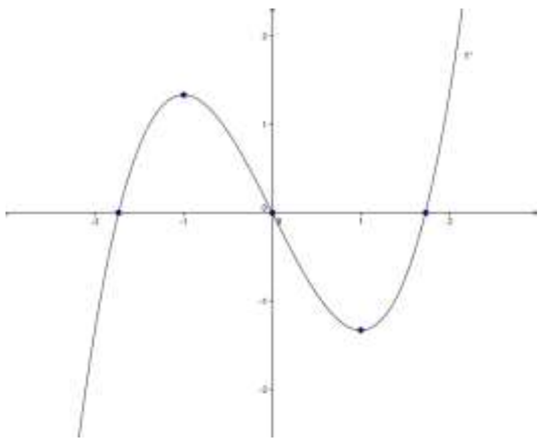
1. Ableitungen:

$$f'(x)=\tfrac{2}{3}x\cdot\left(x^2-3\right)$$
$$f''\left(x\right)=2\cdot\left(x^2-1\right)$$
$$f'''\left(x\right)=4x$$



2. Nullstellen:
$x_1=\sqrt{3}$ $x_2=-\sqrt{3}$, je von 2. Ordnung, weshalb diese Nullstellen auch Nullstellen der 1. Ableitung sind.

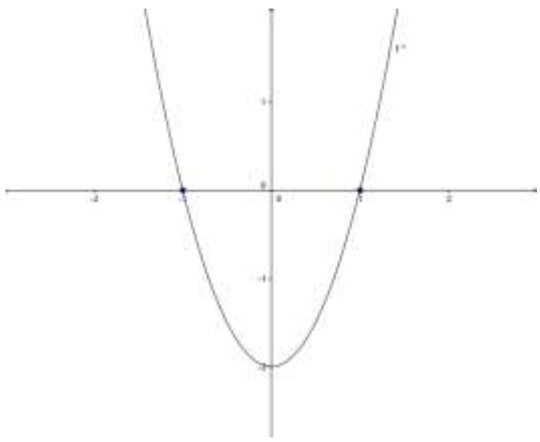
3. Extrema:
$H\left(0,\tfrac{3}{2}\right)$, denn $f''\left(0\right)=-2<0$ d.h. der Graph hat eine Rechtskurve (Vorzeichenwechsel von f ‘ von – nach +)
T1($\sqrt{3}$, 0) T2(- $\sqrt{3}$, 0), denn $f''\left(\pm\sqrt{3}\right)=4>0$,
d.h. der Graph hat eine Linkskurve (Vorzeichenwechsel von f ‘ von + nach -)



4. Wendepunkte:
$W_{1,2}\left(\pm 1,\tfrac{2}{3}\right)$. Die 2. Ableitung wechselt an den Stellen ±1 das Vorzeichen (f ‘hat an den Stellen 1 und -1 ein lokales Minimum bzw. Maximum)

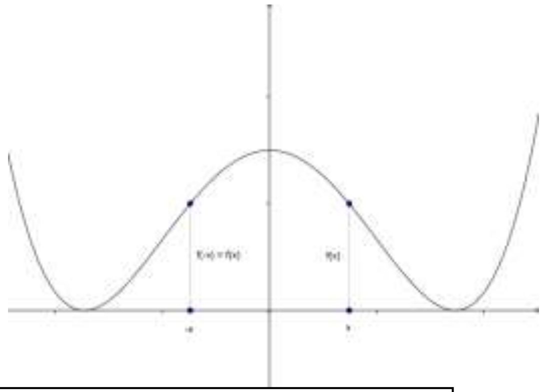
5. Symmetrie:
Wegen $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ ist der Graph axial-symmetrisch bezüglich der y-Achse.

6. Asymptotisches Verhalten:
Für betragsgrosse x verhält sich f(x) wie $\frac{1}{6}x^4$



Bezüglich der Axialsymmetrie gilt allgemein:

Definition:
Der Graph einer Funktion f heisst axialsymmetrisch zur y-Achse genau dann, wenn für alle x des Definitionsbereichs gilt: $f(-x) = -f(x)$.
Die Funktion f heisst in diesem Fall gerade.



Beispiel:
$f(x) = \cos x$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ Halbkreisbogen mit Radius 2

> Satz:
> Kommen in der Funktionsgleichung eines Polynoms nur gerade Exponenten vor, dann ist der Graph axialsymmetrisch zur y-Achse.

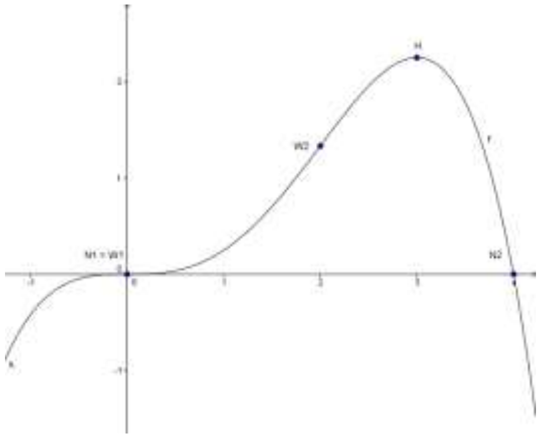
Da in der ersten Ableitung ausschliesslich ungerade Exponenten vorkommen, ist der Graph der ersten Ableitung punktsymmetrisch zum Ursprung.

Übungsaufgabe:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot (4-x)}{12}$$

1. Ableitungen:

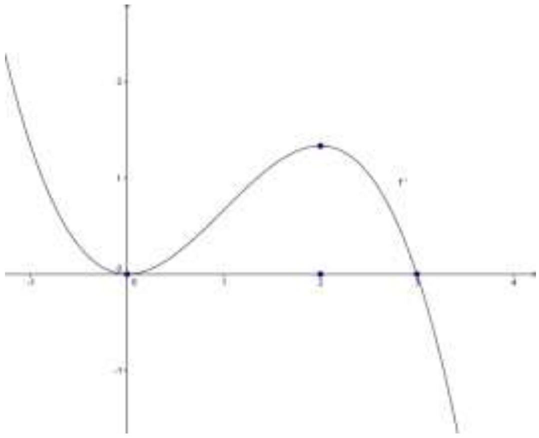
$$f'(x) = x^2 - \tfrac{1}{3}x^3$$
$$f''(x) = 2x - x^2$$
$$f'''(x) = 2 - 2x$$



2. Nullstellen:

$f(x) = x^3(4-x) = 0 \quad x_{1,2,3} = 0 \quad x_4 = 4$

Da x = 0 dreifache Nullstelle von f ist, hat
f ' die doppelte Nullstelle x = 0 und
f " eine einfache Nullstelle bei x = 0.



3. Wendepunkte

$W_1(0,0)$ mit horizontaler Tangente

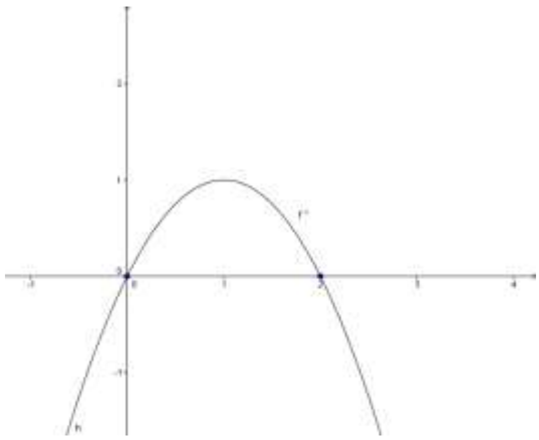
VZW von f " von - nach +

$W_2\left(2, \tfrac{4}{3}\right)$

VZW von f " von + nach -

Gleichung der Wendetangente

$y = \tfrac{4}{3}x - \tfrac{4}{3}$



4. Extrema

$H\left(3, \tfrac{9}{4}\right)$ Hochpunkt

VZW von f ' von + nach -

f "(3) = -3 < 0 . Der Graph G_f hat also
in einer Umgebung eine Rechtskurve.

5. Asymptotisches Verhalten:

$$f(x) = \frac{x^4}{12}\left(\frac{4}{x} - 1\right) \approx -\frac{x^4}{12}$$

Für betragsgrosse s verhält sich f wie die
Ersatzfunktion $f(x) = -\tfrac{1}{2}x^4$

Übungsaufgabe:

$$f(x) = \tfrac{1}{12} \cdot (3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16) = (x-2)^2(3x^2 - 4x - 4)$$

Lösung

N: $(-{}^2/_3, 0)$, $(2,0)$ $\quad$ $T(0, -{}^4/_3)$ $\quad$ $W(2,0)$

7. Asymptotisches Verhalten

Für das Verhalten des Graphen eines Polynoms ist es nützlich, den Verlauf für betragsgrosse x zu kennen. Dazu klammert man das Glied, dessen Exponent maximal ist aus.

$$f(x) = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)$$

Die Klammer hat für x $\to \infty$ bzw. x $\to - \infty$ den Grenzwert a_n, d.h. für den Verlauf des Polynoms f ist für betragsgrosse x das Glied massgebend, dessen Exponent maximal ist.

Daraus folgt insbesondere für Polynome ungeraden Grades:

Satz:
Ein Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle.