

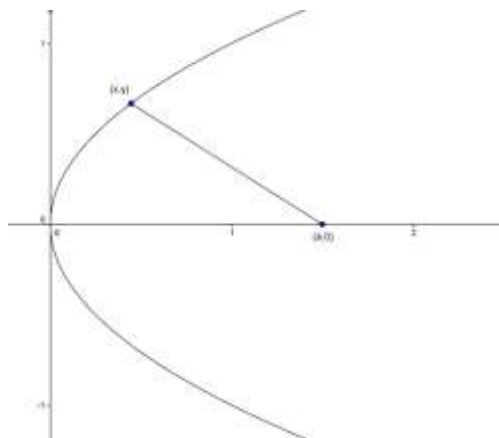
## Randextremum

Das folgende Beispiel zeigt, dass das Extremum auch an den Randstellen angenommen werden kann.

Aufgabe:

Welche Punkte auf der Parabel  $y^2 = x$  haben vom Punkt  $A(a,0)$  kleinsten Abstand?

In der Abbildung ist  $a = \frac{1}{4}$  bzw.  $a = \frac{3}{2}$



1. Zielfunktion:

Abstandsquadrat  $D = (a - x)^2 + y^2$

2. Nebenbedingung:

Die Koordinaten von P erfüllen die Parabelgleichung:  $y^2 = x$

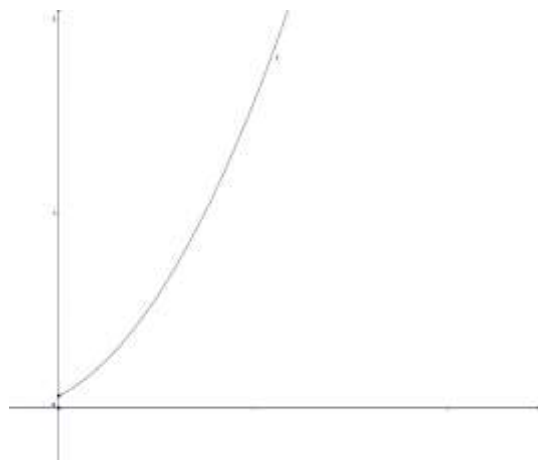
3.  $D(x) = (a - x)^2 + x \quad 0 \leq x < \infty$

4. Kandidaten für das Minimum:

Randstelle  $x = 0$ !  $D(0) = a^2$

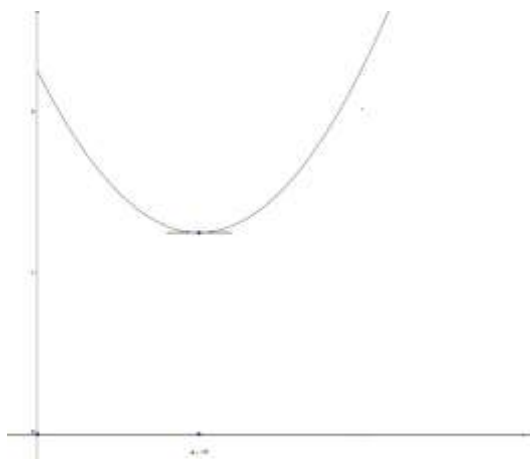
Nullstellen der 1. Ableitung:  $D'(x) = -2 \cdot (a - x) + 1 = 0 \quad x = a - \frac{1}{2}$

Fall  $a \leq \frac{1}{2}$



nächster Punkt (0/0)

Fall  $a > \frac{1}{2}$



Der Vergleich der Funktionswerte an der Randstelle 0

$D(0) = a^2$

bzw. an der Nullstelle der 1. Ableitung

$D(a - \frac{1}{2}) = a^2 - (a - \frac{1}{2})^2 < a^2$

ergibt:  $D(x)$  wird für  $x = a - \frac{1}{2}$  minimal

Ergebnis:

Folgende Punkte der Parabel  $y = x^2$  haben vom  $P(a,0)$  kleinsten Abstand:

für  $a \leq \frac{1}{2}$ :

(0,0)

für  $a > \frac{1}{2}$ :

$P(a - \frac{1}{2}, \sqrt{a - \frac{1}{2}})$  und  $P(a - \frac{1}{2}, -\sqrt{a - \frac{1}{2}})$