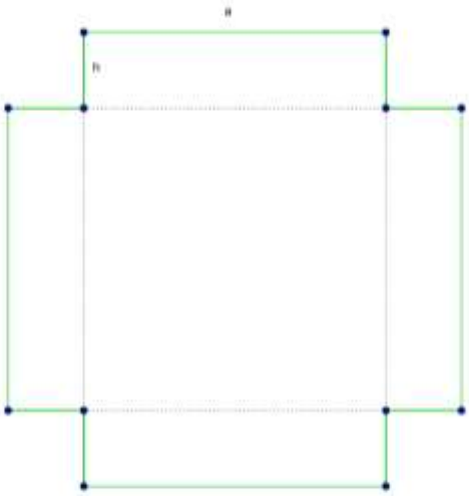
Extremalprobleme

Schachtel

Aufgabe:
Aus einem quadratischen Stück Karton mit der Seite a (dm) werden an den vier Ecken Quadrate weggeschnitten. Bei welcher Wahl der Quadratseite hat die zugehörige Schachtel möglichst grosses Volumen?

1. Zielfunktion:
Stelle die Grösse, die maximal werden soll, mit Hilfe geeigneter Variablen dar.
$V = Gh$

2. Nebenbedingung:
$G = (a-2h)^2$



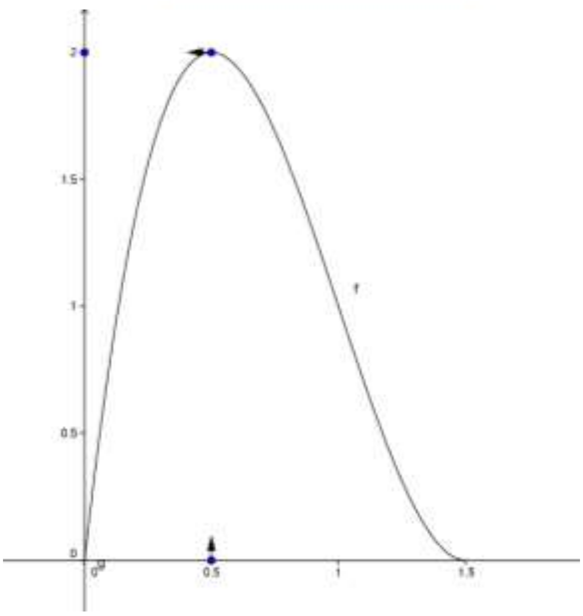
3. Zielfunktion in einer Variablen:
$$V(h) = (a-2h)^2\, h = 4h^3 - 4ah^2 + a^2 h \qquad (1)$$

4. Gesucht ist das Maximum im Intervall $\left[0, \frac{a}{2}\right]$
$V'(h) = 12h^2 - 8ah + a^2 = (6h-a)\cdot(2h-a) = 0$
$h_1 = \frac{1}{6}a \quad V(h_1) = \frac{2}{27}a^3$

V verschwindet an den Intervallgrenzen und wird deshalb an der Stelle $h = \frac{1}{6}a$ maximal.

Das maximale Volumen beträgt $V = \dfrac{2a^3}{27}$

Graph für a = 3



Die Aufgabe kann auch ohne Differentialrechnung mit der sogenannten Mittelwertungleichung gelöst werden:

Das geometrische Mittel zweier nicht negativer Zahlen a, b ist höchstens gleich ihrem arithmetischen Mittel mit Gleichheit genau dann, wenn a = b bzw.
$\sqrt{ab} \le \frac{1}{2} \cdot (a+b)$

oder dem folgenden

Satz:	
Voraussetzung:	$x_1 + x_2 + ... + x_n = c$ mit $x_i, c \ge 0$
Behauptung:	$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ wird genau dann maximal, wenn
	$x_1 = x_2 = ... = x_n = \frac{1}{n} c$

Im Schachtelbeispiel wird V(h) genau dann maximal, wenn $(a-2h) \cdot (a-2h) \cdot (4h)$ maximal ist (der Kunstgriff mit dem Faktor 4 bewirkt, dass die drei Faktoren die konstante Summe 2a haben. Damit ist die Voraussetzung des Satzes erfüllt.
Aus der Gleichheit der drei Faktoren folgt:
a - 2h = 4h und daraus die Lösung $h = \frac{1}{6} a$.