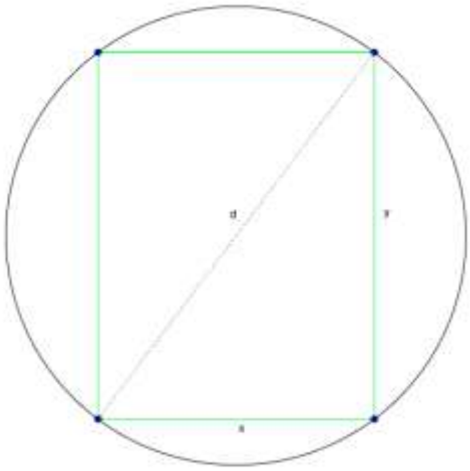
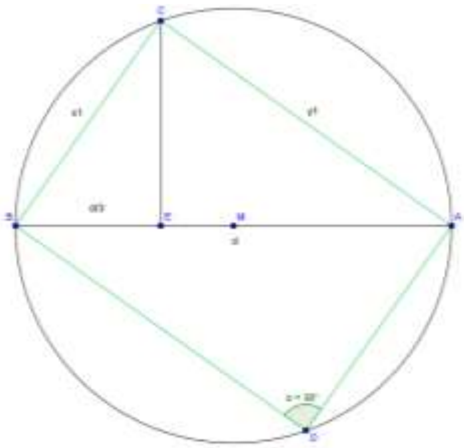
Tragfähigkeit

Aus einem zylindrischen Holzstamm vom Durchmesser d soll ein Deckenbalken von grösster Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit T ist bei rechteckigem Querschnitt proportional zur Breite und proportional zum Quadrat der Höhe des Balkenquerschnitts.



1. Zielfunktion:
Die Tragfähigkeit soll maximal werden:
$T = k \cdot xy^2$
2. Nebenbedingung:
$y^2 = d^2 - x^2$
3. $T(x) = k \cdot x \cdot (d^2 - x^2) = k \cdot (d^2 x - x^3)$
wobei $0 \le x \le d$
4. $T'(x) = k \cdot (d^2 - 3x^2)$
$x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}} = \pm \frac{d\sqrt{3}}{3}$
Ergebnis:
Die Tragfähigkeit ist für $x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$ maximal.

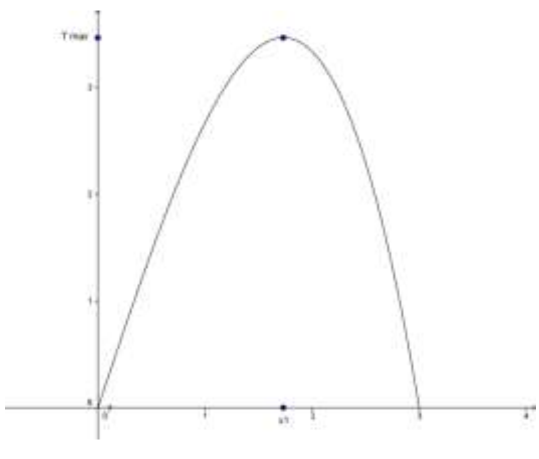


Geometrisch kann der Querschnitt mit maximaler Tragfähigkeit wie folgt konstruiert werden (sogenannte Zimmermannregel):

Der Durchmesser des Kreises wird in drei gleiche Teile. Geteilt. In den beiden Teilpunkten werden die Lote auf dem Durchmesser nach entgegengesetzten Seiten errichtet. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis bestimmen eine Diagonale des Rechtecks mit maximaler Tragfläche.

Der Beweis ergibt sich aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BEC und BAC.
In ähnlichen Dreiecken stimmen nämlich die Verhältnisse entsprechender Seiten überein:

$$\frac{x_1}{d} = \frac{\frac{d}{3}}{x_1} = \frac{d}{3x_1} \qquad x = \frac{d\sqrt{3}}{3}$$



Graph mit d = 3 und $k = \frac{1}{3}$