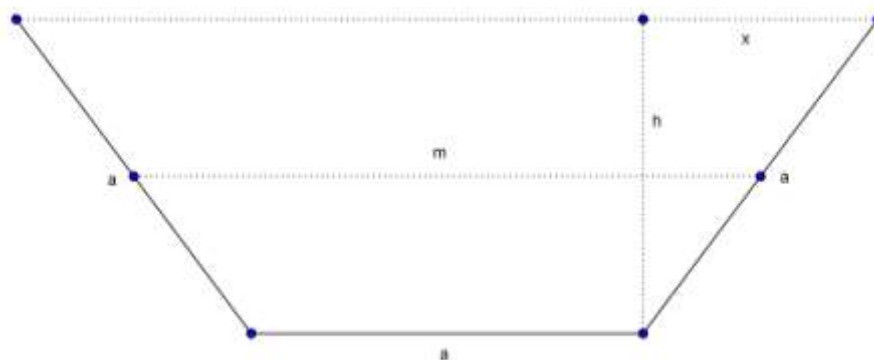
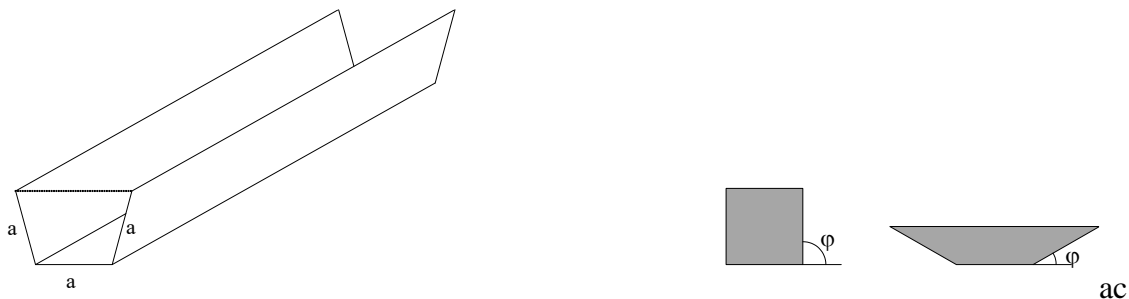


Aufgabe:

Aus drei Brettern der Breite a ist eine offene Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt so herzustellen, dass sie möglichst viel Wasser führen kann.



1. Zielfunktion

Der Querschnitt soll maximal sein:

$$Q = mh$$

2. Nebenbedingung:

Führt man als neue Variable die Teilstrecke x ein, dann gilt:

$$m = a + x \quad \text{und} \quad h = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$3. \quad Q(x) = (a + x)\sqrt{a^2 - x^2}$$

Beim Auftreten von Wurzeln betrachtet man oft das Quadrat des Funktionsterms (der Querschnitt ist genau dann maximal, wenn das Quadrat des Querschnitts maximal ist).

$$f(x) = (a + x)^2(a^2 - x^2) = (a + x)^3(a - x) \quad 0 \leq x \leq a$$

4. Die 1. Ableitung kann mit der Produkt- und Kettenregel berechnet werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(a + x)^2(a - x) - (a + x)^3 \\ &= (a + x)^2(3a - 3x - a - x) = 2(a + x)^2(a - 2x) = 0 \end{aligned}$$

Nullstellen $x = -a$ und $x = \frac{a}{2}$

An den Intervallgrenzen ist die Querschnittsfläche 0 bzw. a^2 .

5. Die Querschnittsfläche wird für $x = \frac{a}{2}$ maximal.

$$Q\left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

