

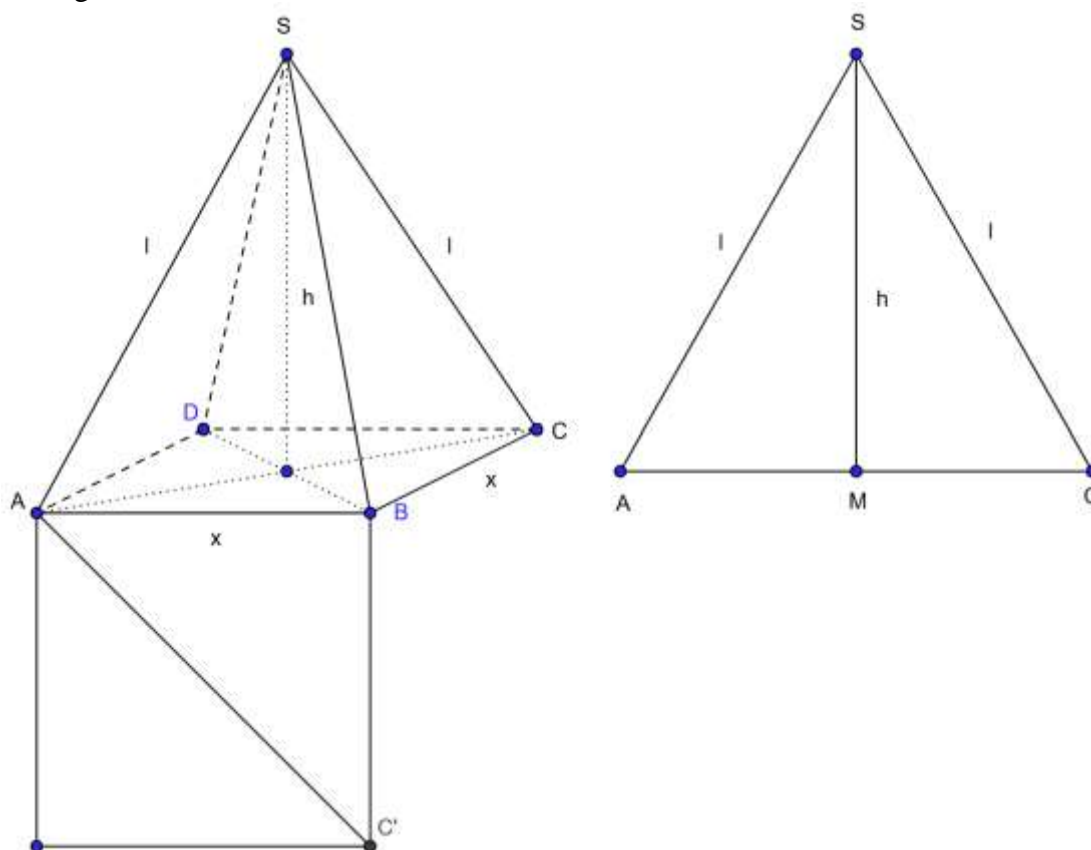
Pyramidenzelt

Aus 4 Stäben der Länge l ist ein reguläres Pyramidenzelt mit maximalem Volumen zusammenzustellen.

Tipp:

Es ist zweckmässig bei räumlichen Problemen geeignete ebene Schnitte zu betrachten

Schrägriss:



1. Zielfunktion:

Das Volumen soll extremal werden: $V = \frac{1}{3} x^2 h$

2. Nebenbedingung:

Nach Pythagoras gilt:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} \right)^2 = h^2 + \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 = 2 \cdot (l^2 - h^2)$$

$$3. V(h) = \frac{2}{3} h \cdot (l^2 - h^2) \quad 0 \leq h \leq l$$

Graph: vgl. Beispiel Tragfähigkeit

$$4. V'(h) = \frac{2}{3} (l^2 - 3h^2) = 0$$

Da V an den Intervallgrenzen verschwindet

wird das Volumen für $h = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ maximal.

Übungsaufgaben:

a)

Welchen Bruchteil des Volumens einer Kugel kann ein einbeschriebener Zylinder höchstens ausmachen?

Lösung:

Zielfunktion: $V(h) = \frac{\pi}{4} \cdot (4R^2h - h^3)$ gesuchter Bruchteil: 57.7%

b)

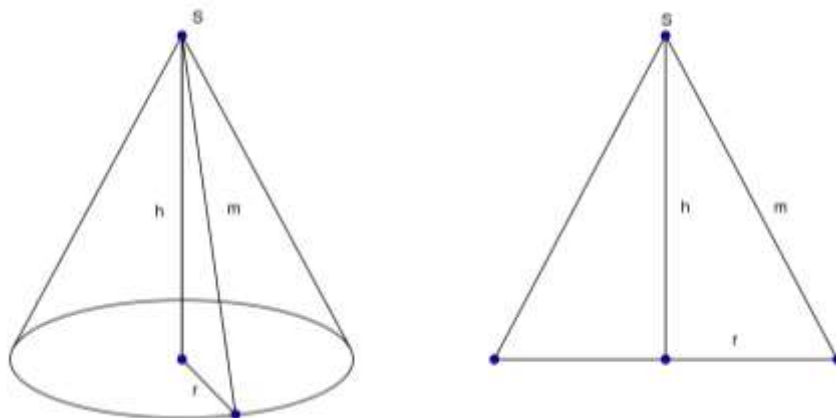
Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $c = 6$ cm erzeugt einen Kegel grössten Inhalts, wenn man es um eine Kathete dreht?

Lösung:

Zielfunktion: $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (36 - h^2)$

Aufgabe:

Aus einem kreisförmigen Stück Papier mit Radius 1 wird ein Sektor ausgeschnitten und daraus eine kegelförmige Tüte gebildet. Für welchen Zentriwinkel mit dem Bogenmass x hat die Tüte maximales Volumen?



1. Zielfunktion:

Das Volumen soll extremal werden:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

2. Nebenbedingungen:

Das Volumen kann als Funktion der Bogenlänge x angegeben werden. Der Umfang des Basiskreises stimmt mit der Bogenlänge des Sektors überein:

$$2\pi r = x \quad r = \frac{x}{2\pi}$$

Die Kegelhöhe ergibt sich mit dem Pythagoras zu:

$$h = \sqrt{1 - r^2}$$

$$3. V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{24\pi^2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

V wird genau dann maximal, wenn das Quadrat von V maximal wird. Ausserdem verändert der konstante Faktor die Extremalstelle nicht. Statt $V(x)$ kann deshalb die folgende einfachere Hilfsfunktion im Intervall $[0, 2\pi]$ betrachtet werden:

$$f(x) = \left(x^2 \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}\right)^2 = x^4 \cdot (4\pi^2 - x^2) = 4\pi^2 x^4 - x^6$$

$$4. f'(x) = 2x^3 \cdot (8\pi^2 - 3x^2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{6} \approx \pm 5.130$$

5. Da f an den Intervallgrenzen verschwindet, wird das Kegelvolumen für den Sektor mit dem Bogenmass 5.13 (Zentriwinkel: 293.9°) maximal.

