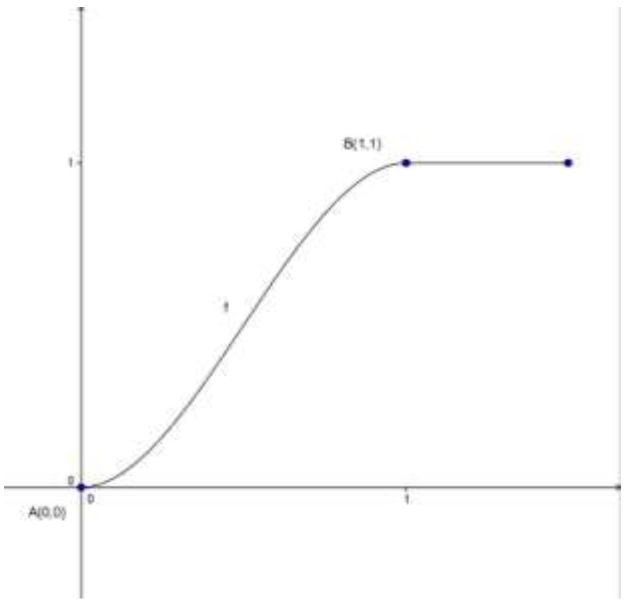
9. Interpolationspolynome

In der Praxis stellt sich etwa die Aufgabe ein Polynom (häufig vom 3. Grades) mit vorgegebenen Eigenschaften zu bestimmen.

Aufgabe:
Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, dessen Graph die zwei geradlinigen Strassenstücke in der Skizze möglichst glatt ineinander überführt.

Ansatz:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$



Zur Bestimmung der 4 Koeffizienten sind 4 Bedingungen nötig. An den Stellen 0 und 1 sollten Funktionswert und 1. Ableitung die vorgegebenen Werte annehmen:

$f(0) = 0 \qquad d = 0$

$f(1) = 1 \qquad a + b + c + d = 1$

$f'(0) = 0 \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad c = 0$

$f'(1) = 0 \qquad 3a + 2b + c = 0$

Das Gleichungssystem hat die Lösungen
a = -2 und b = 3

Gesuchte Gleichung: $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

Aufgabe:
Der Graph eines Polynoms 3. Grades geht durch A(0,8) und hat in W(2,4) einen Wendepunkt. Die Wendetangente ist parallel zur Geraden $y = -3x$. Wie heisst die Polynomgleichung?

Ansatz:
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\qquad$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\qquad$ $f''(x) = 6ax + 2b$

$f(0) = 8$	(1)	d = 8	eingesetzt in (2) und (4) und ordnen
$f(2) = 4$	(2) $8a + 4b + 2c + 8 = 4$		$4a + 2b + c + 4 = 2$
$f''(2) = 0$	(3) $12a + 2b = 0$		
$f'(2) = -3$	(4) $12a + 4b + c = -3$		Die Tangente in W ist parallel zu $y = -3x$

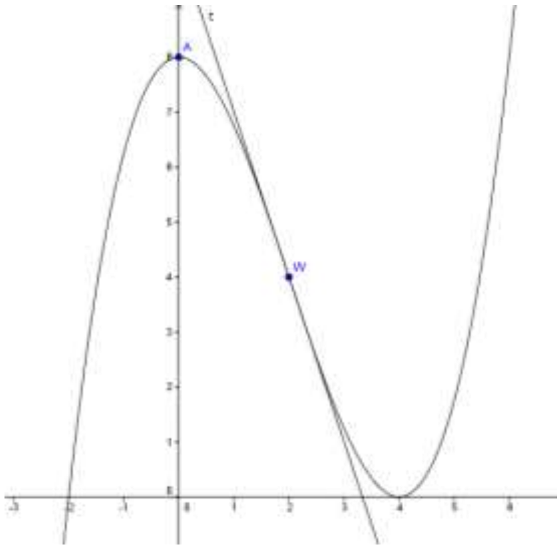
$$\left| \begin{array}{llll} 4a & +2b & +c & = -2 \\ 12a & +4b & +c & = -3 \\ 12a & +2b & & = 0 \end{array} \right|$$

Subtrahiert man die 1. Gleichung von der 2., so erhält man das folgende Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{lll} 8a & +2b & = -1 \\ 12a & +2b & = 0 \end{array} \right|$$

Nach erneuter Subtraktion der 1. von der 2. Gleichung $4a = 1$ oder $a = \frac{1}{4}$.
Einsetzen in die 3. bzw. 1. Gleichung führt auf $b = -\frac{3}{2}$ und schliesslich auf $c = 0$

Gesuchte Gleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8$



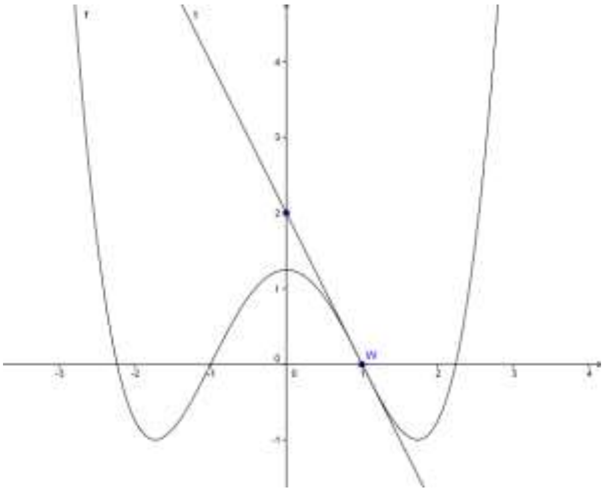
Bemerkung:
Da ein Polynom 3. Grades genau einen Wendepunkt hat, ist die Bedingung f '''(3) ≠ 0 automatisch erfüllt.

Spezieller Ansatz bei symmetrischen Graphen:

Zentralsymmetrischer Graph eines Polynoms von 3. Grad: $f(x) = ax^3 + cx$

Zur y-Achse axialsymmetrischer Graph eines Polynoms 4. Grades: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Aufgabe:
Der Graph eines Polynoms 4. Grades ist zur y-Achse symmetrisch. W(1,0) ist Wendepunkt.
Die Wendetangente in P schneidet die y-Achse bei $y = 2$. Wie heisst die Funktionsgleichung?



Ansatz:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

$f''(x) = 12ax^2 + 2b$

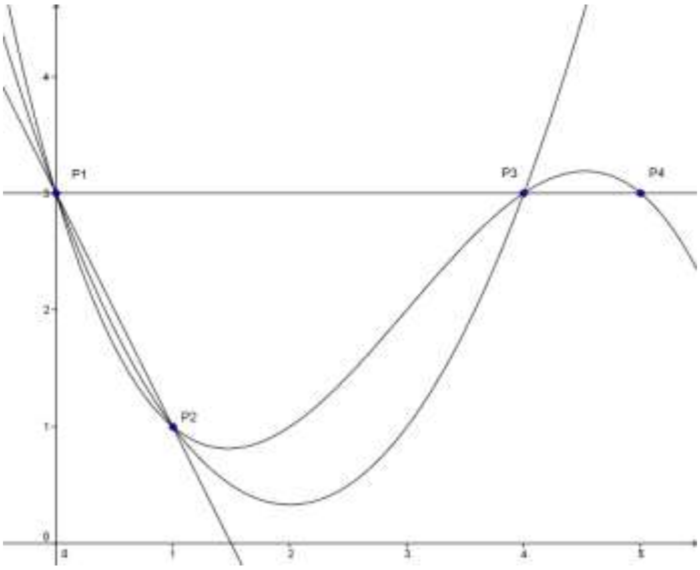
f(1) = 1 (1) $a + b + c = 0$
f "(1) = 0 (2) $12a + 2b = 0$
f '(1) = -2 (3) $4a + 2b = -2$
Steigung der Geraden
durch P(0,2) und W(1,0)

(3) von (2) subtrahieren
$a = \frac{1}{4}$ eingesetzt in (2) ergibt $b = -6a = -\frac{3}{2}$
bzw. in (1) $c = \frac{5}{4}$
Gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}$

Interpolation

In Anwendungen stellt sich etwa das Problem, eine Funktion anzugeben, die an vorgegebenen x-Werten (den sogenannten Stützstellen) vorgegebene Funktionswerte annimmt. Die Funktion ermöglicht es dann, für x-Werte zwischen (inter!) den Stützstellen plausible Funktionswerte anzugeben. In diesem Fall spricht man von Interpolation. Ein Beispiel ist etwa die lineare Interpolation bei Tabellen.

Gemäss einer **Idee von Newton** kann die Aufgabe schrittweise gelöst werden, wie das folgende Beispiel zeigt.



$P_1(0,3)$, $P_2(1,1)$, $P_3(4,3)$, $P_4(5,3)$

$f_1(x)=3$

Ansatz für f_2:

$f_2(x)=3+a\cdot(x-0)$

mit $f_2(1)=1$ ergibt $a=-2$

Ansatz für f_3:

$f_3(x)=3-2\cdot(x-0)+b\cdot x\cdot(x-1)$

mit $f_3(4)=3$ ergibt

Ansatz für f_4:

$f_4(x)=3-2\cdot(x-0)+\frac{2}{3}\cdot x\cdot(x-1)+c\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-4)$

mit $f_4(5)=3$ ergibt $c=-\frac{1}{6}$

Gesuchte Funktionsgleichung:

$$f_4(x)=3-2\cdot(x-0)+\tfrac{2}{3}\cdot x\cdot(x-1)-\tfrac{1}{6}\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x-4)$$
$$=-\tfrac{1}{6}\cdot x^3+\tfrac{3}{2}\cdot x^2-\tfrac{10}{3}\cdot x+3$$

Übungsaufgabe:
An einem Wintertag wurden folgende Temperaturen gemessen:

Tageszeit:	10:00	14:00	16:00	18:00
Temperatur	-5°	3°	2°	-5°

Wie hoch war die Temperatur um 12:00 und zu welcher Zeit und wie hoch war die Temperatur maximal
a) bei polynomialer Interpolation?
b) bei quadratischer Interpolation, wenn die letzte Messung weggelassen wird?

Lösung:
a) 12:00 0°, Maximale Temperatur 3.2° um 14:37‘
b) 12:00 0.7°, Maximale Temperatur 3.1° um 14:24

Das Thema wird im Kapitel Analysis 2→Numerische Verfahren → Interpolation fortgeführt.