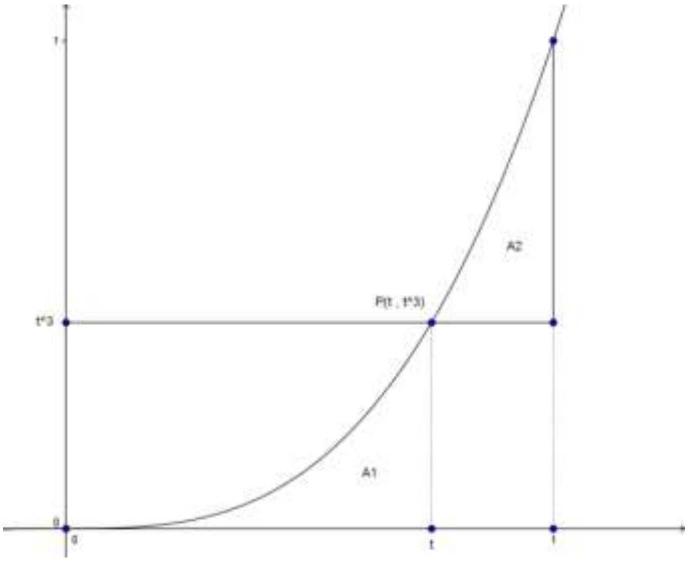
Ein Extremalproblem aus der Integralrechnung:

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3$ im Intervall [0,1]. Wie ist die Parallele durch den Kurvenpunkt $P(t, t^3)$ zu wählen, damit die Summe der beiden positiv gerechneten Flächeninhalte
$A = A_1 + A_2$
extremal wird. Handelt es sich um ein Minimum oder Maximum ?

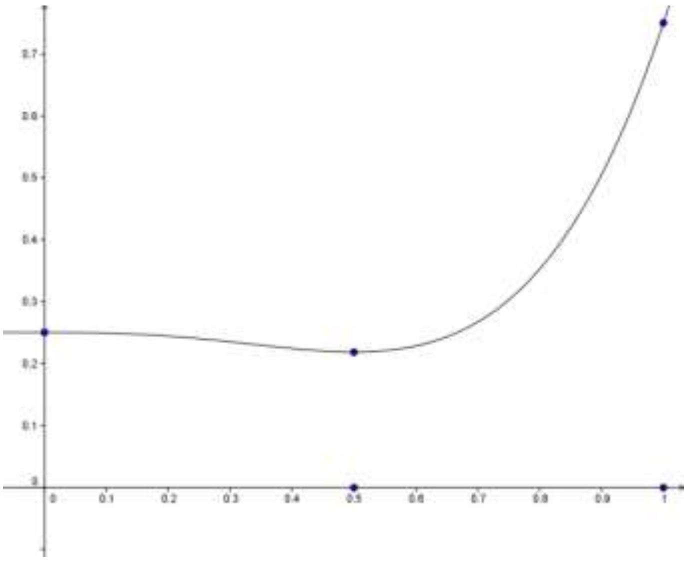


Zielfunktion
1. $A = A_1 + A_2$ soll maximal werden.
2. -
3. Intervall [0,1]

$$A(t) = \int_0^t (t^3 - x^3)\,dx + \int_t^1 (x^3 - t^3)\,dx = (t^3 x - \tfrac{1}{4}x^4)\Big|_0^t + (\tfrac{1}{4}x^4 - t^3 x)\Big|_t^1$$

$$= (t^4 - \tfrac{1}{4}t^4) + (\tfrac{1}{4} - t^3) - (\tfrac{1}{4}t^4 - t^4) = \tfrac{3}{2}t^4 - t^3 + \tfrac{1}{4}$$

4.
$A'(t) = 6t^3 - 3t^2 = 3t \cdot (2t - 1) = 0$
Nullstellen $t = \frac{1}{2}$ A($\frac{1}{2}$) = $\frac{7}{32} \approx 0.21875$
Werte an den Intervallgrenzen:
A(0) = $\frac{1}{4}$ A(1) = $\frac{3}{4}$
Lösung:
Globales Maximum M = $\frac{3}{4}$,
Globales Minimum m = $\frac{7}{32}$ an der Stelle t = $\frac{1}{2}$



Kontrolle:
$A''(t) = 18t^2 - 6t = 6t \cdot (3t - 1) \quad A''(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2} > 0$)