

08 Trigonometrische Funktionen

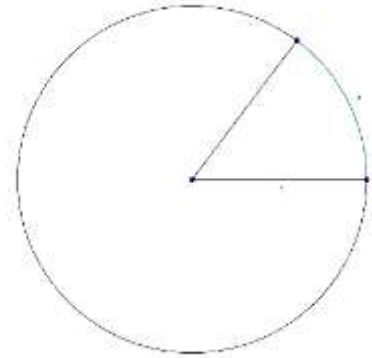
Trigonometrische Funktionen spielen bei der Beschreibung von periodischen Bewegungsabläufen eine wichtige Rolle.

8.1. Repetition einiger Eigenschaften

Winkel werden in der Mathematik im sogenannten Bogenmass gemessen. Das Bogenmass eines Winkels ist gleich der Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis.

Beispiel:

Der abgebildete 60° -Winkel hat das Bogenmass $\frac{\pi}{3}$, nämlich $\frac{1}{6}$ des Kreisumfangs



Definition:

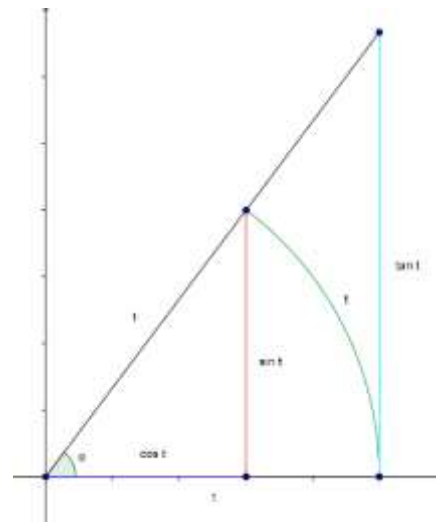
Der Sinus eines Winkels ist gerade gleich der y-Koordinate des zugehörigen Punktes im Einheitskreis, der Cosinus gleich der x-Koordinate.

Grundlegende Beziehungen:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (2)$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (3)$$



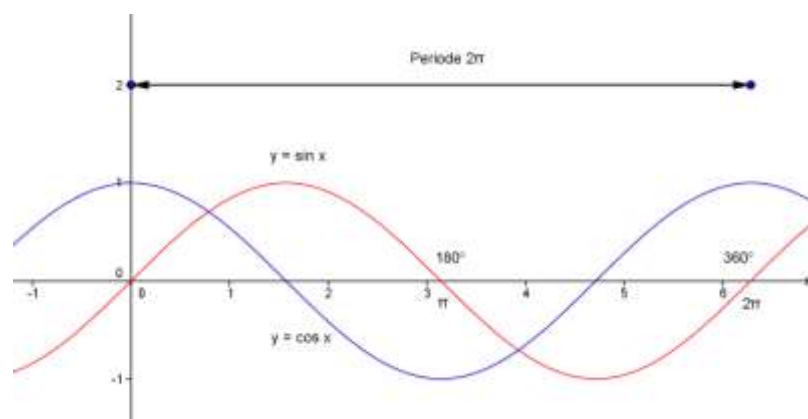
Graphen:

Quadrantenrelationen:

Vom Vorzeichen abgesehen stimmen die trigonometrischen Funktionswerte an den folgenden Stellen.

t	α
$\pi - t$	$180^\circ - \alpha$
$\pi + t$	$180^\circ + \alpha$
$2\pi - t$	$360^\circ - \alpha$

Das Vorzeichen ist durch das Vorzeichen des Punktes auf dem Einheitskreis bestimmt.



Additionstheoreme:

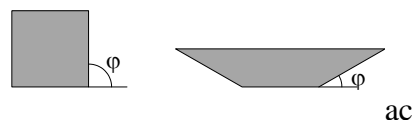
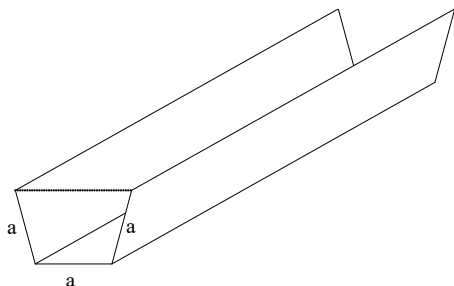
speziell: $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ und

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

8.2 Extremalprobleme

Beispiel 1:

Aus drei Brettern der Breite a ist eine offene Wasserrinne mit trapezförmigem Querschnitt so herzustellen, dass sie möglichst viel Wasser führen kann.



1. Zielfunktion

Der Querschnitt soll maximal sein

$$Q = mh$$

Wahl eines Winkels φ als Variable

$$2. \quad h = a \cdot \sin \varphi, \quad x = a \cdot \cos \varphi$$

3. Zielfunktion mit einer Variablen

$$Q(\varphi) = a^2 \cdot \sin \varphi \cdot (1 + \cos \varphi) \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$4. \quad Q'(\varphi) = a^2 \cdot (\cos^2 \varphi + \cos \varphi - \sin^2 \varphi)$$

Wegen $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ kann $Q'(\varphi)$ in der folgenden Form dargestellt werden:

$$Q'(\varphi) = a^2 (2 \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1)$$

$$= a^2 (2 \cos \varphi - 1) \cdot (\cos \varphi + 1) = 0$$

Nullstellen der 1. Ableitung:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$\cos \varphi = -1$ (ausserhalb des Intervalls)

Vergleich der Funktionswerte:

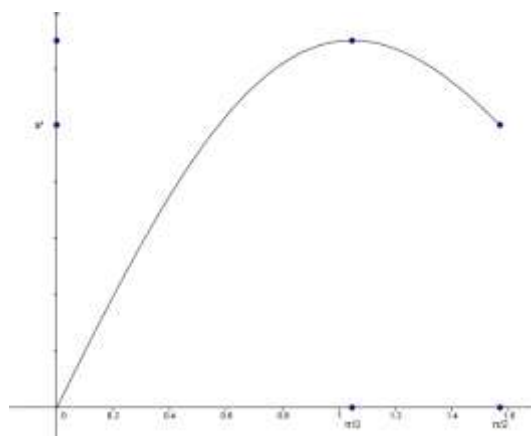
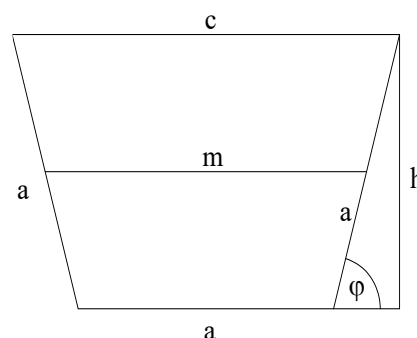
$$Q(0) = 0 \quad Q\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 \quad Q\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$$

Ergebnis:

Das Fassungsvermögen der Wasserrinne wird für $\varphi = \pi/3$ maximal.

Übungsaufgabe:

Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $c = 6$ cm erzeugt bei Rotation um eine Kathete einen Kegel grössten Inhalts?



Beispiel 2:

Zwei Korridore von $a = 6.75$ m und $b = 2$ m Breite stoßen rechtwinklig aneinander. Wie lange darf eine Stange höchstens sein, damit sie horizontal um die von den Korridoren gebildete Ecke transportiert werden kann?

1. Zielfunktion:

Länge der Stange $L = u + v$

2. Nebenbedingungen:

$$\frac{a}{u} = \sin \varphi \qquad \frac{b}{v} = \cos \varphi$$

$$u = \frac{a}{\sin \varphi} \qquad v = \frac{b}{\cos \varphi}$$

3. Zielfunktion in einer Variablen:

$$L(\varphi) = \frac{a}{\sin \varphi} + \frac{b}{\cos \varphi} \qquad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

L gibt für einen bestimmten Winkel, die Länge der für diesen Winkel maximal mögliche Leiterlänge an. Gesucht ist der Winkel mit der grössten Einschränkung. Bei diesem Winkel ist die Länge $L(\varphi)$ minimal..

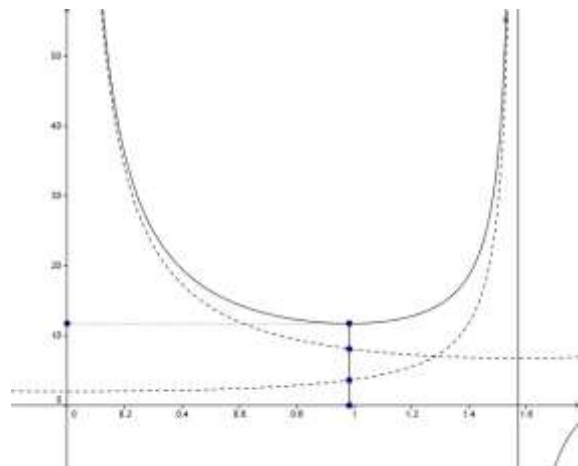
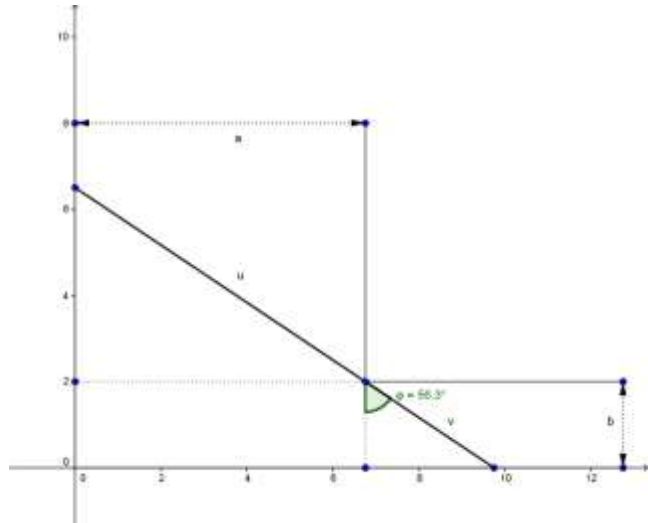
$$4. \quad L'(\varphi) = -\frac{a \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{b \cdot \sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = 0$$

$$\frac{\sin^3 \varphi}{\cos^3 \varphi} = \tan^3 \varphi = \frac{a}{b}$$

$$\tan \varphi = \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 1.50 \qquad \varphi \approx 56.3^\circ$$

Ergebnis:

Die Stange kann eine Länge von maximal 11.7 m haben.



Übungsaufgabe:

In eine innen halbkugelförmige Schale mit Radius r wird ein Stäbchen der Länge a gelegt ($2r \leq a \leq 4r$). Bei welcher Lage des Stäbchens liegt sein Mittelpunkt am tiefsten.

Lösung:

$$\overline{SR} = r \cdot \cos \varphi$$

$$\overline{OM} = 2\overline{SR} - \frac{1}{2}a = 2r \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2}a$$

$$y = \overline{OM} \cdot \sin \varphi = (2r \cdot \cos \varphi - \frac{1}{2}a) \cdot \sin \varphi$$

$$y' = 4r \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}a \cdot \cos \varphi - 2r = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{a + \sqrt{a^2 + 128r^2}}{16r}$$

$a < 2r$ Stäbchen in horizontaler Lage

$a = 2r$ $\varphi = 32.5^\circ$ $y = 0.3690 r$

$a = 3r$ $\varphi = 23.2^\circ$ $y = 0.1332 r$

$a > 4r$ Stäbchen kippt nach aussen.

