Differentialgleichungen

1. Grundbegriffe

Die aus den bisherigen Kapiteln bekannten Bestimmungsgleichungen haben als Lösungen reelle Zahlen.

Beispiel:
Die quadratische Gleichung $x^2 - 7x + 10 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$, was durch Einsetzen leicht bestätigt werden kann.

Im Gegensatz dazu sind bei den Differentialgleichungen Funktionen gesucht.

Beispiel:
Bekanntlich besteht zwischen der Weg-Zeitfunktion $s(t)$, der Geschwindigkeit $v(t)$ und der Beschleunigung $a(t)$ der folgende Zusammenhang:
$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ und $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ und damit $a = \dot{v} = \ddot{s}$.
Beim sogenannten freien Fall ist die Beschleunigung konstant und es gilt:
$a = \dot{v} = \ddot{s} = -g$.
Gesucht sind somit Funktionen, deren zweite Ableitung konstant ist. In diesem einfachen Fall kann die allgemeine Lösung durch zweimalige Integration bestimmt werden:
Wegen $\dot{v} = -g$ gilt: $v(t) = -g \cdot t + c_1$
und wegen $\dot{s} = v$ gilt: $s(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + c_1 \cdot t + c_2$.
Die Konstanten sind durch die sogenannten Anfangsbedingungen bestimmt:
$c_1 = v(0) = v_0$ Anfangsgeschwindigkeit und $c_2 = s(0) = s_0$ Anfangshöhe.

Definition:
Eine (gewöhnliche) Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion y, welche die n-te Ableitung von y in Beziehung setzt zu x, y und den Ableitungen bis zur Ordnung $n - 1$:
$y^{(n)} = F\left(x, y, y', \ldots . y^{(n-1)}\right)$
Eine Funktion y = y(x) heisst eine Lösung der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differentialgleichung identisch d.h. für alle Werte der Variablen x erfüllt.

Beispiele:

$y'' = -y + e^x$	(explizite) Differentialgleichung 2. Ordnung
$x + y \cdot y' = 0$	(implizite) Differentialgleichung 1. Ordnung

Es wird zwischen der allgemeinen oder einer speziellen (partiellen) Lösung unterschieden. Die allgemeine Lösung enthält eine oder mehrere Integrationskonstanten. Eine spezielle Lösung ist durch die Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt.

Beispiele:
$y' = cy \quad c \in R$
allg. Lösung: $y = ce^x$ spezielle Lösung: $y = 2e^x$
$\ddot{y} + y = 0$
allg. Lösung: $y = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ spezielle Lösung: $y = 2 \cdot \sin t - \cos t$

Aufgabe:
Zeigen Sie, dass $y = ce^{-x} + x$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = x - y + 1$ ist.
Lösung : $\left(ce^{-x} + x\right)' = -ce^{x} + 1 = x - \left(ce^{x} + x\right) + 1$

Übungsaufgabe:
Zeigen Sie, dass $y = \dfrac{x}{1 + cx}$ eine Lösung der Differentialgleichung $x^2 \cdot y' - y^2 = 0$ ist.
Welche Kurve der Lösungsschar geht durch den Punkt (1, -1).

Lösung: c = -2

Geometrisch ist durch die allgemeine Lösung eine Kurvenschar festgelegt, einer speziellen Lösung entspricht eine bestimmte Kurve dieser Schar.

Beispiel:
Die Differentialgleichung $y' = 2x$ hat die allgemeine Lösung $y = x^2 + c$, deren Graph eine Schar von zur y-Achse symmetrischen Parabeln mit dem Scheitel $S(0, c)$ darstellt. Durch jeden Punkt (x_0, y_0) der Ebene geht genau eine Parabel.

In diesem einfachen Fall besteht das Lösen der Differentialgleichung in der Berechnung eines unbestimmten Integrals. In den folgenden Kapiteln wird gezeigt, dass weitere Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.