5. Kurvenscharen, orthogonale Trajektorien

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung legt eine Kurvenschar in einem Gebiet der xy-Ebene fest. Umgekehrt kann eine Kurvenschar durch die Differentialgleichung.
$y' = F(x, y)$
beschrieben werden, sofern durch jeden Punkts des Gebiets genau eine Kurve der Schar geht.

Beispiel:
Kurvenschar:
1) $y = c \cdot x^2$
2) $y' = 2c \cdot x$

Man erhält die Differentialgleichung, indem man mit den gegebenen Gleichungen den Parameter eliminiert:
Multipliziert, man 2) mit x und dividiert durch 2 so ergibt sich
$\frac{1}{2} \cdot x \cdot y' = c \cdot x^2$ oder nach Multiplikation mit 2 wegen 1)
$x \cdot y' = 2 \cdot c \cdot x^2 = 2y$
Die Kurvenschar kann damit durch die folgende Differentialgleichung beschrieben werden:
$x \cdot y' - 2y = 0$.

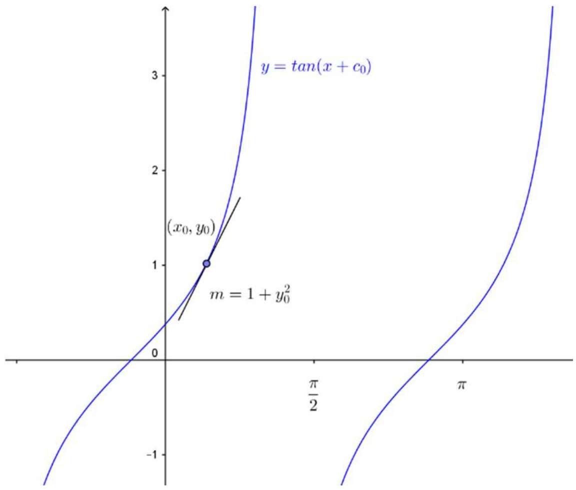
Übungsaufgaben:

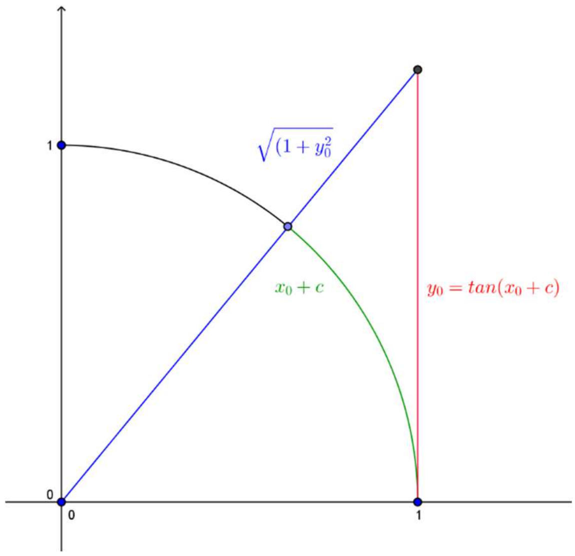
Kurvenschar	Differentialgleichung
$y = c \cdot \cos x$	$y' + y \cdot \tan x = 0$
$y = e^x + cx$	$x \cdot y' - y + (1 - x) \cdot e^x = 0$
$y = \tan(x + c)$	$y' = 1 + y^2$

Wegen $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ ergibt sich die Differentialgleichung unmittelbar zu
$y' = 1 + y^2$
Verwendet man $(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x}$ dann gilt:

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + c)} = \frac{1}{\cos^2(\arctan(y))} = 1 + y^2$$

Die beiden Wege sind in den Abbildungen dargestellt





Orthogonale Trajektorien

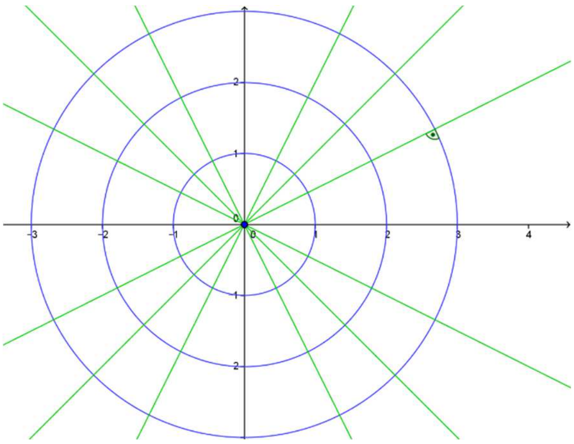
Unter einer orthogonalen Trajektorie einer Kurvenschar versteht man eine Kurve, welche alle Scharkurven unter einem rechten Winkel schneidet. Im Folgenden wird beschrieben, wie diese Schar der orthogonalen Trajektorien bestimmt werden kann.

Anmerkung:
Vergleiche dazu die Höhenkurven auf Landkarten, wo die orthogonalen Trajektorien die Richtung des steilsten Abstiegs oder Anstiegs bedeuten.

Beispiele:
a)
Gegebene Kurvenschar Ursprungsgeraden
1) $y = cx$
2) $y' = c$

Setzt man $c = \frac{y}{x}$ aus 1) in 2) ein, so erhält man die Differentialgleichung der Geradenschar

$y' = \frac{y}{x}$



Bekanntlich gilt für die Steigungen zweier senkrecht stehender Geraden $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien lautet damit

$y' = -\frac{x}{y}$

Sie kann durch Separation gelöst werden

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y\,dy = -x\,dx$

$\int y\,dy = -\int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c$

$x^2 + y^2 = 2c$

Die orthogonalen Trajektorien sind also Ursprungskreise.

b)

Gegebene Kurvenschar Parabelschar

1) $y = cx^2$

2) $y' = 2cx$

Setzt man $c = \frac{y}{x^2}$ aus 1) in 2) ein, so erhält man die Differentialgleichung der Parabelschar

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien lautet damit

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

Sie kann durch Separation gelöst werden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

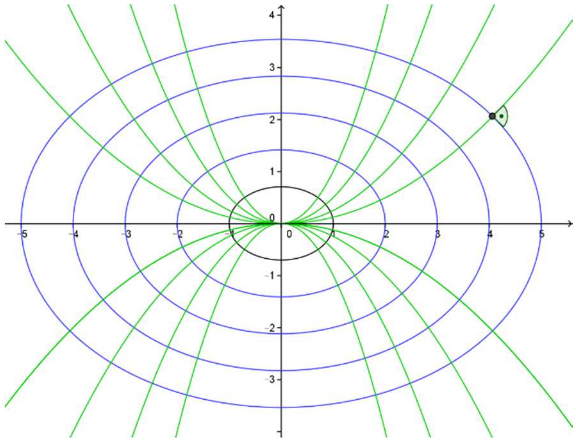
$$2y\ dy = -x\ dx$$

$$\int 2y\ dy = -\int x\ dx$$

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c$$

$$x^2 + 2y^2 = 2c \qquad c > 0$$

$$\frac{x^2}{2c} + \frac{y^2}{c} = 1$$



Die orthogonalen Trajektorien sind also Ellipsen mit den Halbachsen $\sqrt{2c}$ und $\sqrt{c}$.

c)
Gegebene Kurvenschar: Hyperbelschar

1) $y = \frac{c}{x}$ $\qquad$ $x \neq 0.$

2) $y' = -\frac{c}{x^2}$.

Setzt man $c = xy$ aus 1) in 2) ein, so erhält man die Differentialgleichung der Hyperbelschar

$y' = -\frac{y}{x}$.

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien lautet damit

$y' = \frac{x}{y}$.

Sie kann durch Separation gelöst werden

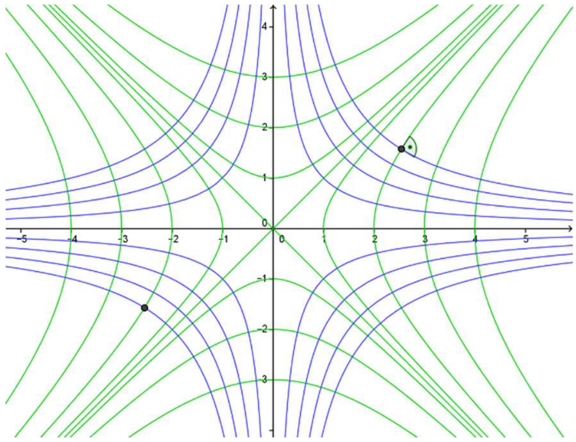
$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$y\,dy = x\,dx$

$\int y\,dy = \int x\,dx$

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c$

oder $y^2 - x^2 = 2c$.



Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

$c > 0$ $\qquad$ Schar gleichseitiger Hyperbeln reelle Achse ist die y-Achse
$c < 0$ $\qquad$ Schar gleichseitiger Hyperbeln reelle Achse ist die x-Achse
$c = 0$ $\qquad$ Geraden mit den Gleichungen y = x und y = -x.

d)
Gegebene Kurvenschar $\qquad$ Parabelschar

1) $y^2 = -2 \cdot (x + c)$

2) $2y \cdot y' = -2$

Die Elimination des Scharparameters entfällt in diesem Fall. Die Parabelschar erfüllt die Differentialgleichung

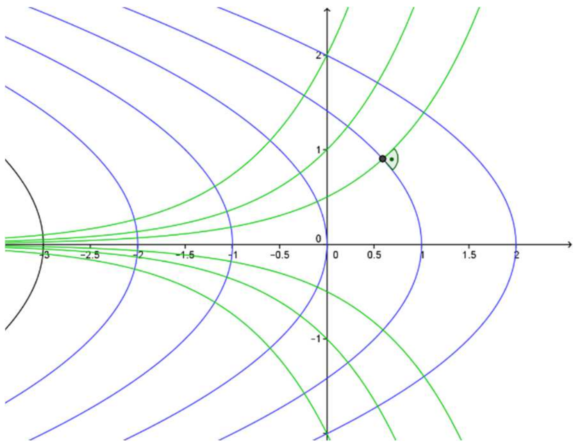
$y' = -\frac{1}{y}$

Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien lautet damit

$y' = y$

Ihre Lösung kann direkt angegeben werden:

$y = c \cdot e^x$



Die orthogonalen Trajektorien sind also Exponentialkurven.

e)
Gegebene Kurvenschar
Büschel aller Kreise, welche die x-Achse im Ursprung berühren.
Ihre Gleichung lautet

1) $x^2 + (y-c)^2 = c^2$ oder vereinfacht

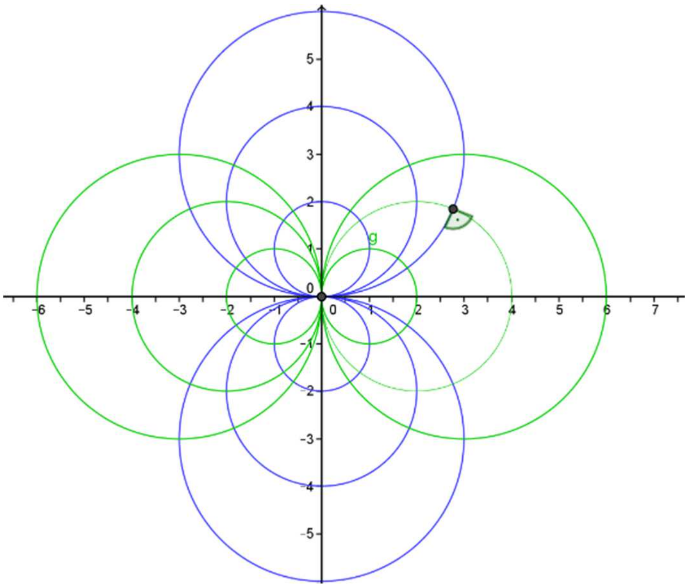
$$x^2 + y^2 - 2cy = 0$$

nach x differenziert

2) $2x + 2y \cdot y' - 2cy' = 0$ oder vereinfacht

$$x + y \cdot y' - cy' = 0 \text{ oder}$$

$$y' \cdot (c - y) = x \text{ bzw. } y' = \frac{x}{c-y} \qquad (3)$$



Der Parameter kann mit 1) eliminiert werden.

$$c = \frac{x^2 + y^2}{2y}$$

Einsetzen in 2) ergibt:

$$y' = \frac{x}{\frac{x^2+y^2}{2y} - y \cdot \frac{2y}{2y}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

Differentialgleichung der Kurvenschar

Die orthogonalen Trajektorien erfüllen damit die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right) \qquad (4)$$

Die Schar der orthogonalen Trajektorien zum gegebenen Kreisbüschel (blau) ist das Büschel der die y-Achse im Ursprung berührenden Kreise (grün). Jeder (grüne) Kreis mit dem Mittelpunkt auf der x-Achse, der die y-Achse berührt, schneidet einen beliebigen blauen Kreis rechtwinklig. Damit ist auch der Winkel im zweiten Schnittpunkt ein rechter.
Die Lösung ergibt sich auch mit erheblichem Aufwand als Lösung der Differential-gleichung (4). Sie kann wegen ihrer speziellen Form mit einer geeigneten Substitution in eine Gleichung übergeführt werden, die durch Separation gelöst werden kann.

Setzt man $u = \frac{y}{x}$, so erhält man mit $y = ux$ für die Ableitung nach der Produkt- bzw. der Kettenregel $y' = u'x + u$.
Die transformierte Differentialgleichung lautet damit

$u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$ oder $u'x = -\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$

Diese Gleichung kann in die folgende Form übergeführt werden:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \left(u + \frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{2x} \cdot \left(\frac{u^2+1}{u}\right)$$

oder in separierter Form

$$\frac{2u \cdot du}{u^2 + 1} = -\frac{1}{x} \cdot dx$$

Integration der beiden Seiten ergibt:

$$ln|u^2 + 1| = -ln|x| + c_1 = -ln|c_2 x| = ln\left|\frac{1}{c_2 x}\right|$$

Daraus folgt:

$$u^2 + 1 = \frac{1}{c_2 x}$$

Die Substitution kann nun rückgängig gemacht werden:
$$\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{1}{c_2 x}$$
Oder nach Multiplikation mit x^2
$$y^2+x^2=Cx$$
Bezeichnet man die Konstante C mit $2r$, so ergibt sich die erwartete Gleichung der Kreisschar zu
$$(x-r)^2+y^2=r^2$$

Ergänzung:
Die angegebene Substitution ermöglicht es auch, die Differentialgleichung (DGL) des gegebenen Kreisbüschels rechnerisch zu lösen.
$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2\cdot\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}} \qquad x\neq 0$$
Damit wird die transformierte DGL zu
$$u'x+u=\frac{2u}{1-u^2}$$
$$u'x=\frac{u+u^3}{1-u^2}$$
Diese DGL kann separiert werden:
$$\frac{1-u^2}{u+u^3}\,du=\frac{dx}{x}$$
Mit Partialbruchzerlegung erhält man:
$$\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dx}{x}$$
Integration:
$$\ln(u)-\ln(u^2+1)=\ln(x)+C$$

Wählt man die Integrationskonstante C als $-\ln(2r)$ so ergibt sich nacheinander
$$\ln\left(\frac{u}{u^2+1}\right)=\ln\frac{x}{2r}$$
$$\frac{u}{u^2+1}=\frac{x}{2r}$$
$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}=\frac{x}{2r}$$
$$\frac{yx}{y^2+x^2}=\frac{x}{2r}$$
$$2ry=x^2+y^2$$
$$x^2+(y-r)^2=r^2$$

Übungsaufgabe:
Von welchem Typ sind die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar
$$y=\frac{c}{x^2}$$
Lösung: $y'=\frac{x}{2y}$, Hyperbelschar $\frac{x^2}{2c}-\frac{y^2}{c}=1$