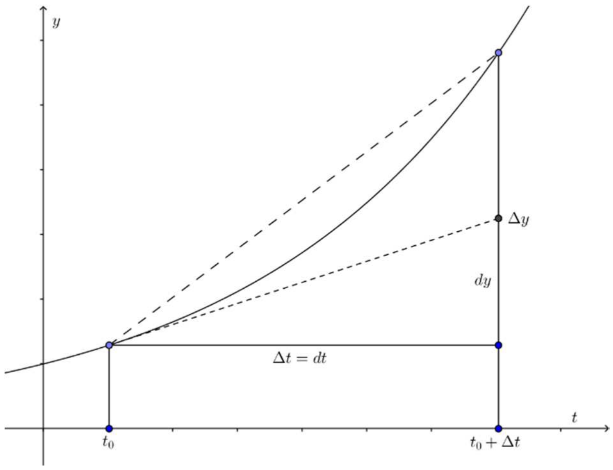
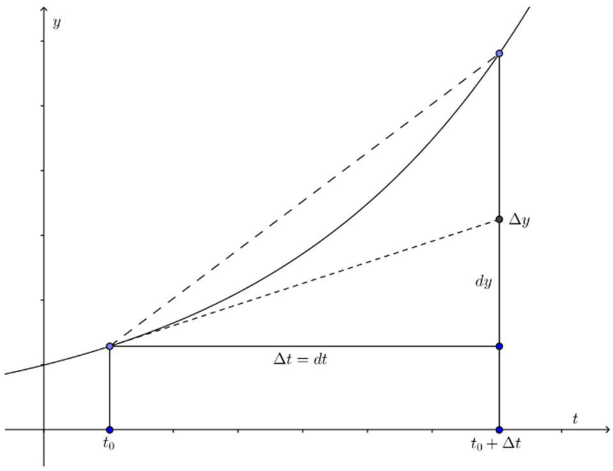
6. Wachstumsformen



Definitionen:
durchschnittliche Wachstumsrate im Zeitintervall Δt: $\frac{\Delta y}{\Delta t}$
geometrisch:
Sekantensteigung, abhängig von Δt
momentane Wachstumsrate: $\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$
geometrisch:
Tangentensteigung, unabhängig von Δt.

6.1 Lineares Wachstum



Mittlere und momentane Wachstumsrate k sind konstant**.**

$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = k$ k ∈ R

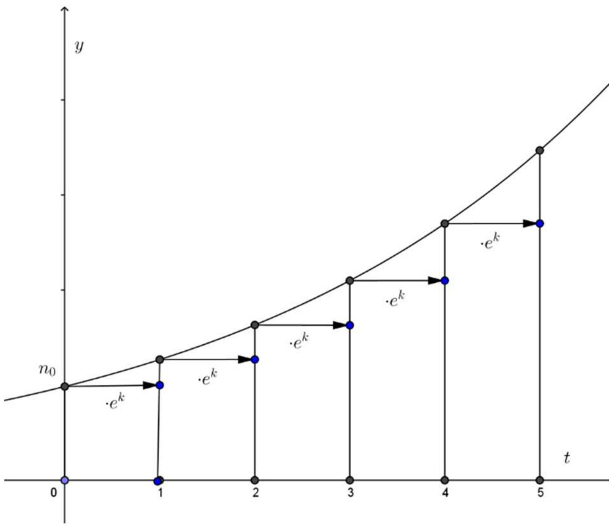
Differentialgleichung des linearen Wachstums

$y = f(t) = k \cdot t + n_0$ f(t) : Bestand zur Zeit t

n_0: Bestand zur Zeit t = 0

k: Wachstumsrate

6.2 Exponentielles Wachstum



Modellannahme beim exponentiellen Wachstum:
Die momentane Wachstumsrate ist proportional zum aktuellen Bestand:

$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$

Differentialgleichung des exponentiellen Wachstums

$y = f(t) = n_0 \cdot e^{kt}$

k > 0 exponentielles Wachstum
k < 0 exponentieller Zerfall

Beispiele:

Radioaktiver Zerfall

Beim radioaktiven Zerfall trifft man die Modellannahme, dass die momentane Zerfallsrate proportional zur Anzahl der zur Zeit t noch vorhandenen Atomkerne ist. Dies führt auf die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls. In diesem Fall setzt man oft $\lambda = -k$

$\frac{dy}{dt} = -\lambda \cdot y$ homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Lösung ist:

$y = f(t) = c \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ λ Zerfallskonstante

Die Konstante c ist durch die Anzahl n_0 der zu Beginn vorhandenen Atomkerne bestimmt.

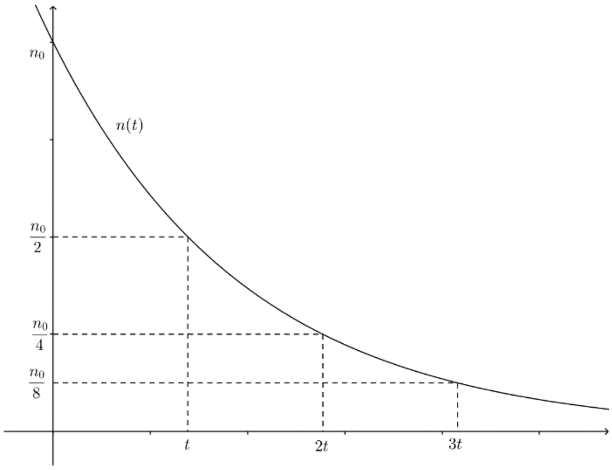
$y = f(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ Zerfallsgesetz

Nach der Halbwertszeit τ hat sich die Anzahl der Kerne halbiert:

$\frac{n_0}{2} = n_0 \cdot e^{-\lambda\tau}$ und daraus

$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Die Halbwertszeit ist also konstant, nämlich umgekehrt proportional zur Zerfallsrate.



Beispiel:

Uran239 hat eine Halbwertszeit von 23.5 Minuten. Nach welcher Zeit ist nur noch 10% der ursprünglichen Substanz vorhanden?

$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \approx 0.03$ Zerfallsrate

$\frac{n_0}{10} = n_0 \cdot e^{-\lambda\tau}$ $t_0 = \frac{\ln 10}{\tau} \approx 78$ Minuten

Bemerkung.

Wegen $e^{-\lambda} \approx 1 - \lambda$ bedeutet dies, dass in der Zeiteinheit ungefähr 3% des aktuellen Bestands zerfällt.

Aufgabe:

Wie lautet die Differentialgleichung, wenn die Halbwertszeit des radioaktiven Elements 28 Jahre beträgt?

Wegen $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ folgt $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \approx 0.0248$.

Die Differentialgleichung lautet somit $\frac{dy}{dt} = \dot{y} = -0.0248 \cdot y$

6.3 Beschränktes Wachstum

In der Natur verlaufen Wachstumsvorgänge nur über kurze Zeiträume exponentiell. Auf lange Sicht sind dem Wachstum natürliche Schranken gesetzt. Die Veränderung ist umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand der Sättigungsgrenze S > 0 nähert.
Man trifft deshalb die Modellannahme, dass die momentane Wachstumsrate proportional zur Differenz S – y ist, d.h.

$\dot{y} = k \cdot (S - y) \qquad k > 0$

Differentialgleichung des beschränkten Wachstums.
Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
für S – y ≠ 0 kann diese Gleichung folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{-\dot{y}}{S - y} = -k$$

Da im Zähler die Ableitung des Nenners steht, kann die Stammfunktion angegeben werden:

$\ln|S - y| = -kt + c_1$ oder $|S - y| = e^{-kt + c_1} = e^{c_1} \cdot e^{-kt} = c_2 \cdot e^{-kt}$

1. Fall:

$S - y = c_2 \cdot e^{-kt}$

$y = S - c_2 \cdot e^{-kt}$

$y = S - c \cdot e^{-kt} \quad c = c_2 > 0$

2. Fall:

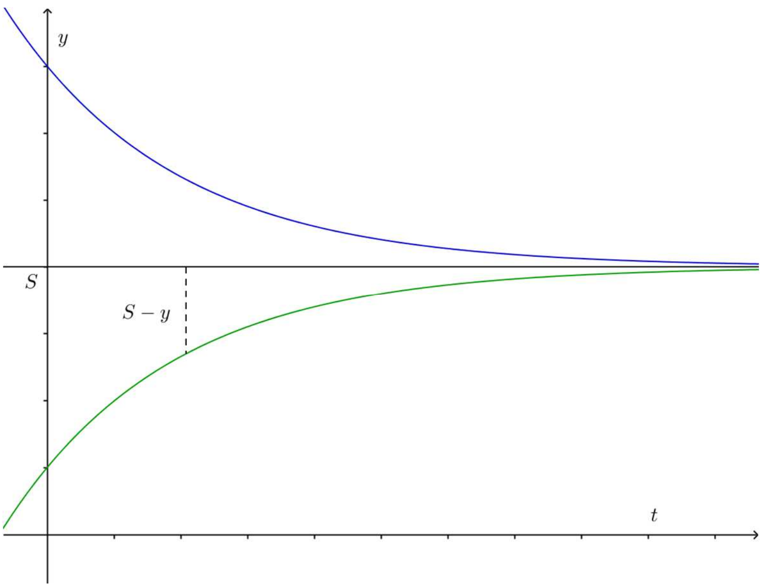
$S - y = -c_2 \cdot e^{-kt}$

$y = S + c_2 \cdot e^{-kt}$

$y = S - c \cdot e^{-kt} \quad c = -c_2 < 0$

Skizze: S = 4, c = 3, k = 0.4

Skizze: S = 4, c = - 3, k = 0.4



Variante der Herleitung:
Die zugehörige homogene Gleichung hat die Lösung

$y = c \cdot e^{-kt}$

Die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems ergibt sich durch Variation der Konstanten. Als spezielle Lösung des inhomogenen Problems kann aber auch die triviale y = S direkt angegeben werden.

Ein Beispiel dazu: **Das Newton'sche Erwärmungs-/Abkühlungsgesetz**

Das Gesetz besagt, dass die momentane Temperaturänderung eines Körpers proportional zu der Differenz zwischen seiner Temperatur T und der Umgebungstemperatur T_U ist.
Damit erfüllt die momentane Temperatur T(t) zur Zeit t die Differentialgleichung
$\dot{T} = k \cdot (T_U - T)$ (1)
mit der Lösung
$y = T(t) = T_U - c \cdot e^{-k \cdot t}$
a) c > 0 Erwärmen $T(0) = T_0 < T_U$
b) c < 0 Abkühlen $T(0) = T_0 > T_U$
Die Lösung kann auch in der folgenden Form dargestellt werden
$T(t) = T_U - (T_U - T_0) \cdot e^{-k \cdot t}$ (2)

Aufgabe zu a) Erwärmen
Ein im Kühlschrank gelagertes Getränk erwärmt sich bei einer Umgebungstemperatur von 30° in 5 Minuten von 4° auf 12°. Welche Temperatur hat es nach 15 Minuten?
$T(t) = T_U - (T_U - T_0) \cdot e^{-kt} = 30 - (30-4) \cdot e^{-kt} = 30 - 26 \cdot e^{-kt}$
$T(5) = 12 = 30 - 26 \cdot e^{-5k}$
$26 \cdot e^{-5k} = 18$ $e^{-5k} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}$ $-5k = \ln \frac{9}{13}$ $k = -\frac{1}{5} \cdot \ln \frac{9}{13} \approx 0.07354$
$T(15) = 30 - 26 \cdot e^{-15k} \approx 21°$
Lösungsvariante:
In 5 Minuten reduziert sich die Differenz von 26° zur Umgebungstemperatur um den Faktor $\frac{18}{26} = \frac{9}{13}$.
In der dreifachen Zeit von 15 Minuten also um den Faktor $\left(\frac{9}{13}\right)^3 \approx 0.3318$
also um $0.3318 \cdot 26° \approx 8.6°$.
Das Getränk hat also nach 15 Minuten eine Temperatur von 30° - 8.6° ≈ 21°.

Übungsaufgabe zu b) Abkühlen:
Für die Südsternwarte in La Silla wurden verschiedene Teleskopspiegel (Durchmesser 8m) gegossen. Bei einem dieser Herstellungsprozesse betrug die Umgebungstemperatur 20°C. Nach dem Verfestigen bei 800°C dauerte es 30 Tage, bis sich der Spiegel auf 100°C abgekühlt hatte. Nach welcher Zeit sank die Spiegeltemperatur unter 21°C?

Lösung:
Die Differentialgleichung (1) hat in diesem Fall die Lösung gemäss (2):
$T(t) = T_U - (T_U - T_0) \cdot e^{-kt} = 20 - (20-800) \cdot e^{-kt} = 20 + 780 \cdot e^{-kt}$
$T(30) = 20 + 780 \cdot e^{-kt} = 100$
$780 \cdot e^{-30k} = 80$ $e^{-30k} = \frac{80}{780} = \frac{4}{39}$ $-30k = \ln \frac{4}{39}$ $k = -\frac{1}{30} \cdot \ln \frac{4}{39} \approx 0.0759$
Für welches t gilt:
$T(t) = 20 + 780 \cdot e^{-kt} = 21$
$780 \cdot e^{-kt} = 1$ $e^{-kt} = \frac{1}{780}$ $-kt = \ln \frac{1}{780}$ $t = -\frac{1}{k} \cdot \ln \frac{1}{780} \approx 88$
Nach etwa 88 Tagen lag die Spiegeltemperatur erstmals unter 21 °C.

Funktionsanpassung bei beschränktem Wachstum

Liegen wie im folgenden Beispiel die Messpunkte (t, ln(S – y)) näherungsweise auf einer Geraden mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt q, dann liegt näherungsweise beschränktes Wachstum vor. Allerdings muss dabei S geeignet aus den Daten geschätzt werden. Die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ mit k = - m und c = e^q ist dann eine geeignete Näherungsfunktion.

Beispiel:
Im Jahre 1950 führte Bousfield einen Test zur Assoziationsfähigkeit durch. Studenten sollten zum Begriff „Säugetier" einzelne Tierarten nennen. Nach jeweils 2 Minuten wurde die Anzahl aller bis dahin genannten Tierarten notiert (siehe die folgende Tabelle).

Wird für die Sättigungsschranke S = 51.5 gewählt, so liegen die Punkte näherungsweise auf einer Geraden mit der Gleichung y* = -0.2335 t + 3.9767.
Die Gleichung der Näherungsfunktion ergibt sich damit zu
$f(t) = S - c \cdot e^{-kt}$ mit S = 51.5, c = 53.339 und k = 0.2335

Bousfeld 1950: Test Assoziationsfähigkeit

Zeit t (min)	Anzahl y der genannten Tiere	S geschätzt	51.5			
t	y	S	S - y	S -y*	Residuen	LN(S - y)
2	20	51.5	31.5	33.5	-2.0	3.450
4	30	51.5	21.5	21.0	0.5	3.068
6	37.5	51.5	14.0	13.2	0.8	2.639
8	43.3	51.5	8.2	8.3	-0.1	2.104
10	46.1	51.5	5.4	5.2	0.2	1.686
12	48.5	51.5	3.0	3.3	-0.3	1.099
14	49.5	51.5	2.0	2.0	0.0	0.693
16	50.2	51.5	1.3	1.3	0.0	0.262