Numerische Lösung von Differentialgleichungen

Die in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen sind in den wenigsten Fällen explizit lösbar. Man ist deshalb auf Näherungsverfahren angewiesen.

Wir betrachten im folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung

(1) $y' = f(x, y)$ mit der Anfangsbedingung $y(a) = y_0$

und setzen voraus, dass im Intervall [a,b] eine eindeutig bestimmte Lösung existiert. Jede Differentialgleichung des Typs (1) legt bekanntlich ein Richtungsfeld fest. Der Graph der gesuchten Funktion $y = F(x)$ soll durch den Punkt (a, y_0) gehen und in jedem Punkt die vorgeschriebene Steigung annehmen. Gesucht ist ein Näherungswert für den Funktionswert F(b).
Wir unterteilen das Intervall in n Intervalle der Breite $h = (b – a)/n$ mit den Teilpunkten $x_i = a + ih$, i = 0, 1, 2, ..., n. Die Näherungswerte für die Funktionswerte $F(x_i)$ werden mit y_i i = 1, 2, 3, …. , n bezeichnet, wobei $y(x_0) = y(a) = y_0$ gilt.
Im Folgenden werden Lösungsverfahren schrittweise verbessert.

1. Das Euler-Cauchy-Verfahren (1768)

Geometrische Idee:
Ersetze an der Stelle $a = x_0$ die Lösungskurve durch die Tangente. Der y-Wert der Tangente y_1 an der Stelle x_1 ist ein brauchbarer Näherungswert für den i.a. unbekannten Funktionswert $F(x_1)$. In den folgenden Intervallen setzen wir das Verfahren analog fort. Vom Punkt (x_0,y_0) ausgehend erhält man so eine Punktfolge (x_i, y_i) i = 0, 1, 2, , n. Der Wert y_n ist eine Näherung für den Funktionswert $F(x_n) = F(b)$.

Rechnerische Durchführung

$x_0 = a$, $y(x_0) = y(a) = y_0$, $h = \frac{1}{n} \cdot (b - a)$
$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$
$x_{i+1} = x_i + h$ i = 0, 1, ….., n - 1.

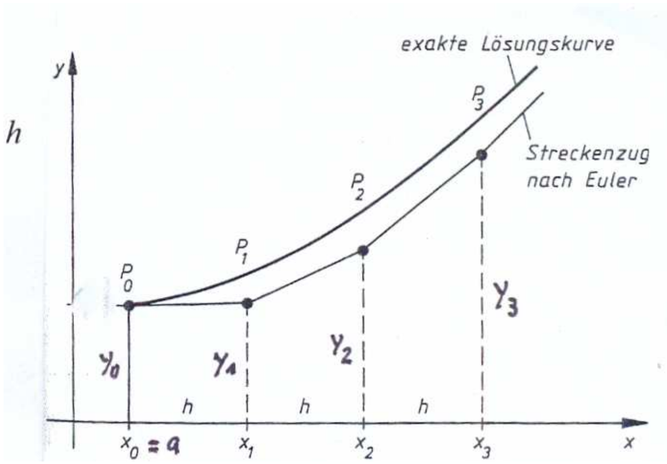


Illustration des Verfahrens an einem Beispiel

$y' = y + 2 \cdot (x-1) \cdot e^x$ mit y(0) = 1 und b = 1.5

Euler-Verfahren

Beispiel $\boxed{y' = y + 2 \cdot (x-1) \cdot e^x}$ Lösung $\boxed{y = (x-1)^2 \cdot e^x}$

a	b
0	1.5

Schrittweite h 0.5

	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}
0	0	1	-1	0.5	0.5
1	0.5	0.5	-1.1487213	1	-0.0743606
2	1	-0.0743606	-0.0743606	1.5	-0.111541
3	1.5	**-0.111541**			

Schrittweite h 0.25

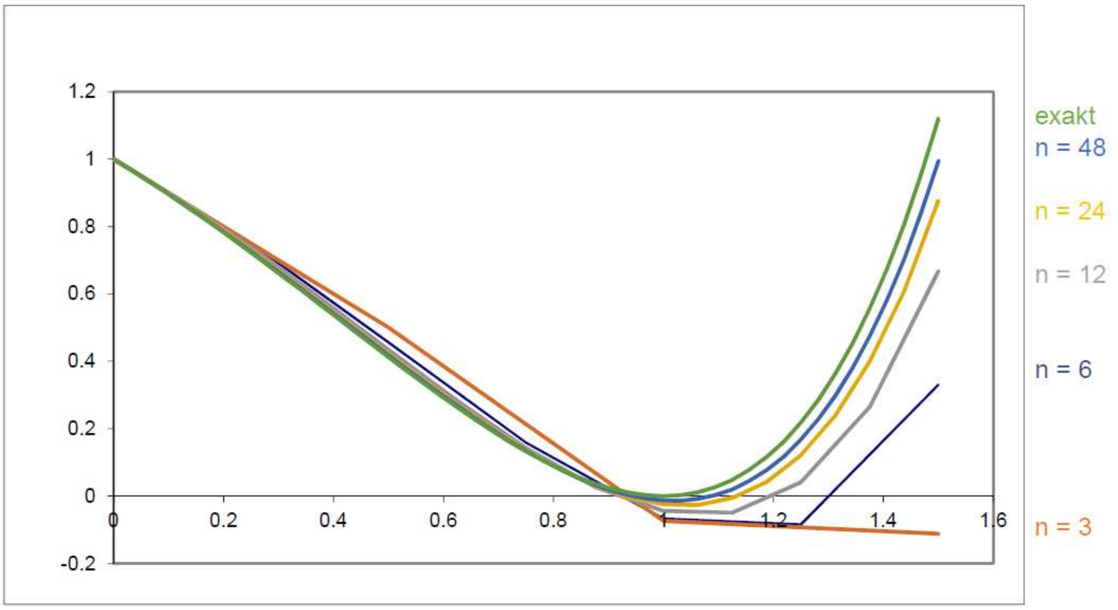
	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}
0	0	1	-1	0.25	0.75
1	0.25	0.75	-1.1760381	0.5	0.45599047
2	0.5	0.45599047	-1.1927308	0.75	0.15780777
3	0.75	0.15780777	-0.9006922	1	-0.0673653
4	1	-0.0673653	-0.0673653	1.25	-0.0842066
5	1.25	-0.0842066	1.66096486	1.5	0.3310346
6	1.5	**0.3310346**			

Schrittweite h 0.125

	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	x_{i+1}	y_{i+1}
0	0	1	-1	0.125	0.875
1	0.125	0.875	-1.1080098	0.25	0.73649878
2	0.25	0.73649878	-1.1895393	0.375	0.58780636
3	0.375	0.58780636	-1.2309329	0.5	0.43393974
4	0.5	0.43393974	-1.2147815	0.625	0.28209205
5	0.625	0.28209205	-1.1190924	0.75	0.1422055
6	0.75	0.1422055	-0.9162945	0.875	0.02766869
7	0.875	0.02766869	-0.5720501	1	-0.0438376
8	1	-0.0438376	-0.0438376	1.125	-0.0493173
9	1.125	-0.0493173	0.72073693	1.25	0.04077484
10	1.25	0.04077484	1.78594632	1.375	0.26401813
11	1.375	0.26401813	3.23032567	1.5	0.66780884
12	1.5	**0.66780884**			

exakte Lösung:

$$y = (x-1)^2 \cdot e^x$$



Das Beispiel zeigt, dass die Methode von Euler nicht sehr genau ist, vor allem dort, wo sich die Steigung stark verändert. Mit jedem Schritt entfernt man sich von der Lösungskurve zu einer benachbarten Kurve, die einer andern Anfangsbedingung entspricht, so dass sich die Fehler akkumulieren. Zwar kann der Fehler dieser Methode durch fortlaufende Halbierung der Schrittweite verkleinert werden. Im Gegenzug nimmt aber mit dem erhöhten Rechenaufwand die Bedeutung der Rundungsfehler zu.

Euler

n	Schrittweite h	Näherung	exakt	Fehler	Fehlerquotien
3	0.5	-0.1115410	1.12042227	-1.2319632	
6	0.25	0.33103460	1.12042227	-0.7893877	1.56
12	0.125	0.66780884	1.12042227	-0.4526134	1.74
24	0.0625	0.87705091	1.12042227	-0.2433714	1.86
48	0.03125	0.99407741	1.12042227	-0.1263449	1.93
96	0.015625	1.05603052	1.12042227	-0.0643917	1.96
192	0.0078125	1.08791437	1.12042227	-0.0325079	1.98

Um die Genauigkeit des Euler-Verfahrens abzuschätzen, wurde ein Beispiel gewählt, dessen genaue Lösung angegeben werden kann. In den beiden letzten Spalten ist der globale Fehler aufgeführt. Daraus kann der Quotient q aufeinanderfolgender Fehler berechnet werden. Es ist zu erkennen, dass sich bei einer Halbierung der Schrittweite auch der Fehler halbiert. Dieses Resultat kann auch hergeleitet werden, indem man die Lösungsfunktion in eine Taylorreihe entwickelt.

Lokaler Fehler der Euler-Methode

Nach Taylor gilt:

$F(x_1) = F(x_0 + h) = F(x_0) + h \cdot F'(x_0) + \frac{F''(c)}{2} \cdot h^2$ und damit für den lokalen Fehler:

$e_1(h) = F(x_1) - y_1 = \frac{F''(c)}{2} \cdot h^2$

Da den ersten beiden Termen gerade die Eulersche Näherung entspricht, ist der lokale Fehler der Euler-Methode proportional zu h^2, der globale Fehler proportional zu h. Bei einer Halbierung der Schrittweite wird auch der Fehler ungefähr halbiert. Wir sagen: Die Euler-Methode hat die Ordnung 1.

Verallgemeinerung
Gilt für den Fehler einer Methode mit der Schrittweite h ungefähr

$e(h) = c \cdot h^p$

dann heisst der Exponent p die Ordnung der Methode.

Für die Schrittweite h/2 erhält man damit

$$e\left(\frac{h}{2}\right) = c \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^p = \frac{c \cdot h^p}{2^p} = \frac{e(h)}{2^p}$$

Hat also eine Methode die Ordnung p so bedeutet dies, dass bei einer Halbierung der Schrittweite der Fehler durch 2^p dividiert wird.
Bildet man wie im Beispiel den Quotienten

$$q = \frac{e(h)}{e\left(\frac{h}{2}\right)}$$

aufeinanderfolgender Fehler, so sollte sich ungefähr eine Potenz von 2 ergeben.
Der zugehörige Exponent von 2 ist dann gerade die gesuchte Ordnung p d.h. wegen $q = 2^p$ gilt $p = \log_2 q$.

Übungsaufgaben:

a) Anfangswertproblem: $y' = y + e^x$ Anfangswert: y(0) = 1 Intervall [0, 0.2]
Schrittweite: h = 0.05 bzw. 0.025 Vergleich mit der exakten Lösung: $y = (x+1) \cdot e^x$

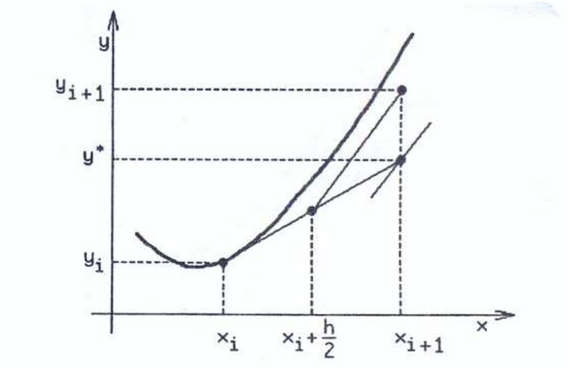
x	y (h = 0.05)	y (h = 0.025)	y exakt
0.00	1.000 000	1.000 000	1.000 000
0.05	1.100 000	1.101 883	1.103 835
0.10	1.207 564	1.211 552	1.215 688
0.15	1.323 200	1.329 535	1.336 109
0.20	1.447 452	1.256396	1.465 683

b) Anfangswertproblem: $y' = -\frac{y}{x}$ Anfangswert: y(2) = 4 Intervall [2, 6]
Schrittweite: h = 0.5 y(6) = 1.091 Vergleich mit der exakten Lösung: $y = \frac{8}{x}$

2. Die Methode von Heun

geometrische Idee:

Bestimme zunächst aus y_i nach Euler einen provisorischen Wert y^*_{i+1} für y_{i+1}.



(1) $y^*_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$
Im Intervall $[x_i, x_i + {}^h/_2]$ wird die Lösung durch die Tangente im Punkt (x_i, y_i) mit Steigung $f(x_i, y_i)$ approximiert, im Intervall $[x_i + {}^h/_2, x_{i+1}]$ durch die Gerade mit Steigung $f(x_{i+1}, y^*_{i+1})$

Rechnerische Durchführung:

$x_0 = a$, $y(x_0) = y(a) = y_0$, $h = \frac{1}{n} \cdot (b-a)$, i = 0, 1, 2, …, n - 1

$$m_1 = f(x_i, y_i)$$

(1) $$y^*_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) = y_i + h \cdot m_1$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$m_2 = f(x_{i+1}, y^*_{i+1})$$

(2) $$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})\right) = y_i + \frac{h}{2} \cdot (m_1 + m_2)$$

Verfahren von Heun

Beispiel $\boxed{y' = y + 2\cdot(x-1)\cdot e^x}$ Lösung $\boxed{y = (x-1)^2 \cdot e^x}$

a	b
0	1.5

Schrittweite 0.5

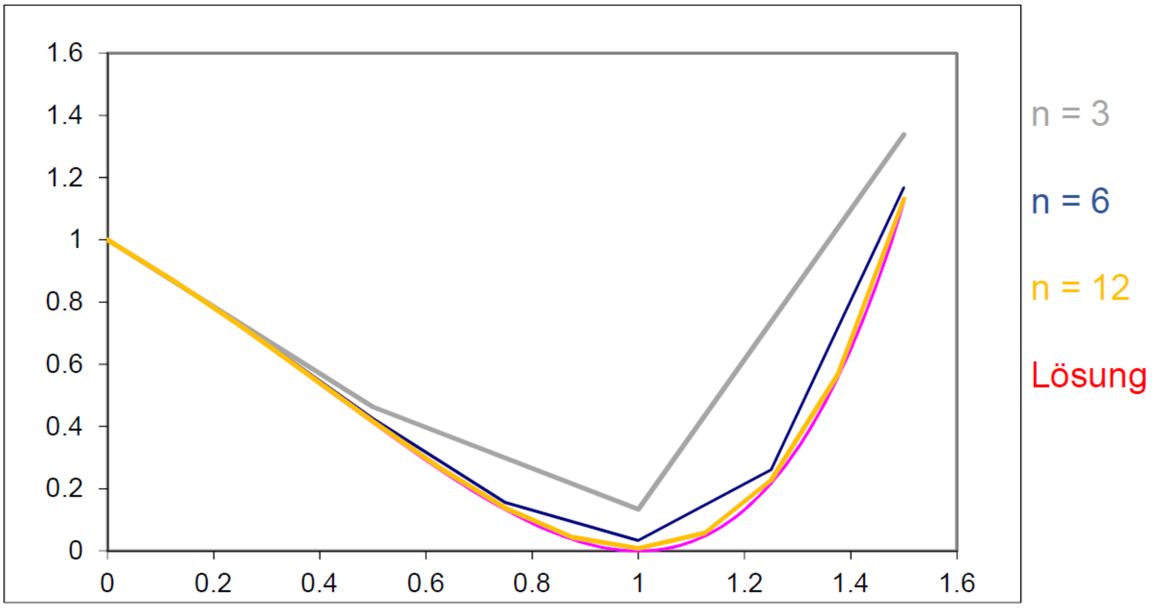
i	x_i	y_i	$m_1 = f(x_i, y_i)$	$x_{i+1} = x_i + h$	$y^* = y_i + h\cdot m_1$	$m_2 = f(x_{i+1}, y^*)$	y_{i+1}	Lösung $y = (x-1)^2\cdot e^x$
0	0	1	-1	0.5	0.5	-1.148721271	0.46281968	1
1	0.5	0.46281968	-1.1859016	1	-0.130131112	-0.130131112	0.13381151	0.41218032
2	1	0.13381151	0.13381151	1.5	0.200717261	4.682406331	**1.33786597**	0
3	1.5	**1.33786597**						1.12042227

Schrittweite 0.25

i	x_i	y_i	$m_1 = f(x_i, y_i)$	$x_{i+1} = x_i + h$	$y^* = y_i + h\cdot m_1$	$m_2 = f(x_{i+1}, y^*)$	y_{i+1}	
0	0	1	-1	0.25	0.75	-1.176038125	0.72799523	1
1	0.25	0.72799523	-1.1980429	0.5	0.428484512	-1.220236759	0.42571028	0.7222643
2	0.5	0.42571028	-1.223011	0.75	0.11995753	-0.938542478	0.15551609	0.41218032
3	0.75	0.15551609	-0.9029839	1	-0.070229884	-0.070229884	0.03386437	0.1323125
4	1	0.03386437	0.03386437	1.25	0.042330462	1.787501941	0.26153516	0
5	1.25	0.26153516	2.00670664	1.5	0.763211818	5.244900888	**1.16798610**	0.21814643
6	1.5	**1.1679861**						1.12042227

Schrittweite 0.125

i	x_i	y_i	$m_1 = f(x_i, y_i)$	$x_{i+1} = x_i + h$	$y^* = y_i + h\cdot m_1$	$m_2 = f(x_{i+1}, y^*)$	y_{i+1}	
0	0	1	-1	0.125	0.875	-1.108009793	0.86824939	1
1	0.125	0.86824939	-1.1147604	0.25	0.728904337	-1.197133788	0.723756	0.86756678
2	0.25	0.723756	-1.2022821	0.375	0.573470735	-1.245268533	0.57078408	0.7222643
3	0.375	0.57078408	-1.2479552	0.5	0.414789687	-1.233931584	0.41566616	0.56835602
4	0.5	0.41566616	-1.2330551	0.625	0.261534273	-1.139650195	0.26737208	0.41218032
5	0.625	0.26737208	-1.1338124	0.75	0.125645532	-0.932854476	0.1382054	0.26272209
6	0.75	0.1382054	-0.9202946	0.875	0.023168576	-0.576550248	0.0446526	0.1323125
7	0.875	0.0446526	-0.5550662	1	-0.02473068	-0.02473068	0.00841529	0.03748243
8	1	0.00841529	0.00841529	1.125	0.009467203	0.779521415	0.05766134	0
9	1.125	0.05766134	0.82771555	1.25	0.161125779	1.906297258	0.22853714	0.04812839
10	1.25	0.22853714	1.97370861	1.375	0.475250713	3.441558255	0.56699132	0.21814643
11	1.375	0.56699132	3.53329886	1.5	1.008653672	5.490342743	**1.13096892**	0.55618266
12	1.5	**1.13096892**						1.12042227



Ordnung des Verfahrens von Heun

Wendet man im Musterbeispiel das Verfahren von Heun an, so erkennt man, dass bei einer Halbierung der Schrittweite der Quotient q aufeinanderfolgender der Fehler ungefähr durch $4 = 2^2$ dividiert wird. Das Verfahren von Heun hat also die Ordnung 2.

Verfahren von Heun (1900)

n	Schrittweite h	Näherung	exakt	Fehler	Quotient
3	0.5	1.33786597	1.12042227	0.2174437	
6	0.25	1.16798610	1.12042227	0.04756383	4.57
12	0.125	1.13096892	1.12042227	0.01054665	4.51
24	0.0625	1.12285036	1.12042227	0.00242809	4.34
48	0.03125	1.12100034	1.12042227	0.00057808	4.20
96	0.015625	1.12056298	1.12042227	0.00014071	4.11
192	0.0078125	1.12045696	1.12042227	3.4689E-05	4.06

Übungsaufgabe
Anfangswertproblem: $y' = y + x$ Anfangswert: y(0) = 0 Intervall [0, 1]
Schrittweite: h = 0.5 schrittweise halbieren Gesucht: y(1)
Vergleich mit der exakten Lösung: $y = (x-1) \cdot e^x$

n	h = 1/n	y(1)	$y_{exakt} = e - 2$	Fehler e(h)	$\frac{e(h)}{e(\frac{h}{2})}$
2	0.5	0.64063	0.7182818…	0.078	
4	0.25	0.69486	0.7182818…		
8	0.125	0.71184	0.7182818…		
16	0.0625	0.71659	0.7182818…		
32	0.03125	0.71785	0.7182818…		
…					
1024	0.00098	0.71828	0.7182818…	00.0000	3.9999

Bestimmt man zeilenweise den Wert $\frac{e(h)}{h^2}$, so stabilisiert sich die Folge bei 0.45. Dies bedeutet, dass für den Fehler gilt:
$e(h) \approx 0.45 \cdot h^2$

3. Das Verfahren von Runge-Kutta (1901)

Es handelt sich um ein Verfahren, das sowohl relativ einfach als auch für ein breites Anwendungsgebiet ausreichend genau ist. Dazu werden aus den Werten von $f(x_i, y_i)$ vier verschiedene Steigungen ermittelt, je ein Wert an den beiden Intervallgrenzen und zwei weitere in der Intervallmitte.

$m_1 = f(x_i, y_i)$	Steigung am linken Intervallende
$m_2 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}h \cdot m_1\right)$	Steigung in der Intervallmitte nach Euler mit Steigung m_1
$m_3 = f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}h \cdot m_2\right)$	Steigung in der Intervallmitte nach Euler mit Steigung m_2
$m_4 = f(x_i + h, y_i + h \cdot m_3)$	Steigung am rechten Intervallende nach Euler mit Steigung m_3

Aus diesen vier Werten wird eine mittlere Steigung m berechnet

$$m = \frac{m_1 + 2(m_2 + m_3) + m_4}{6}$$

Mit den Abkürzungen $k_i = h \cdot m_i$ ergibt sich damit für den nächsten Näherungswert

(3) $$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2 \cdot (k_2 + k_3) + k_4}{6}$$

Falls f nicht von y abhängt, gilt

$$k_1 = h \cdot f(x_i)$$

$$k_2 = k_3 = h \cdot f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(x_i + h)$$

und Gleichung (3) vereinfacht sich zu

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i) + 4 \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + f(x_i + h)}{6}$$

d.h. das Gegenstück zum Verfahren von Runge-Kutta ist das Verfahren von Simpson (1710-1761) zur Näherungsberechnung eines bestimmten Integrals (entsprechend ist das Gegenstück des Verfahrens von Heun die Trapezregel).

Für die Rechnung verwenden wir folgendes Schema

i	x	y	$f(x,y)$	$k = h \cdot f(x,y)$
0	x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	k_1
	$x_0 + \frac{1}{2} \cdot h$	$y_0 + \frac{1}{2} \cdot k_1$	$f\left(x_0 + \frac{1}{2} \cdot h, y_0 + \frac{1}{2} \cdot k_1\right)$	k_2
	$x_0 + \frac{1}{2} \cdot h$	$y_0 + \frac{1}{2} \cdot k_2$	$f\left(x_0 + \frac{1}{2} \cdot h, y_0 + \frac{1}{2} \cdot k_2\right)$	k_3
	$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	$f(x_0 + h, y_0 + k_3)$	k_4

Daraus ergibt sich der Näherungswert an der nächsten Stützstelle $x_1 = x_0 + h$ zu

$$y_1 = y_0 + k \qquad \text{mit } k = \frac{k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4}{6}$$

Runge-Kutta

Beispiel $\boxed{y' = y + 2 \cdot (x-1) \cdot e^x}$ Lösung $\boxed{y = (x-1)^2 \cdot e^x}$

a	b
0	1.5

Schrittweite 0.5

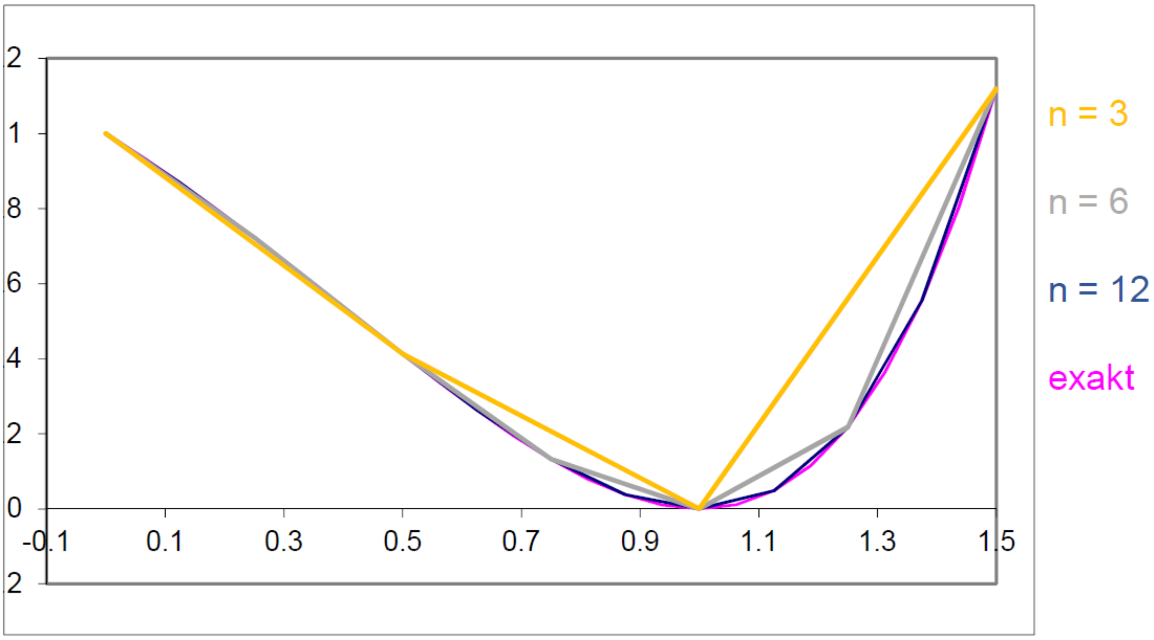
i	x_i	y_i	$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0	1	-0.5	-0.58801906	-0.61002383	-0.62937255	0.412423612
1	0.5	0.41242361	-0.61814883	-0.47757541	-0.44243205	-0.01500422	0.000228952
2	1	0.00022895	0.000114476	0.872728834	1.090882424	2.786400223	1.119185154
3	1.5	**1.11918515**					

Schrittweite 0.25

i	x_i	y_i	$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0	1	-0.25	-0.27700245	-0.28037775	-0.30160397	0.722272604
1	0.25	0.7222726	-0.30094138	-0.31173434	-0.31308346	-0.30988303	0.412195937
2	0.5	0.41219594	-0.30913133	-0.28588855	-0.2829832	-0.23232182	0.132329828
3	0.75	0.13232983	-0.23154255	-0.14579007	-0.13507101	-0.00068529	4.82954E-06
4	1	4.8295E-06	1.20738E-06	0.192514911	0.216579124	0.490438858	0.218109519
5	1.25	0.21810952	0.490820249	0.857456796	0.903286365	1.400771239	1.120289154
6	1.5	**1.12028915**					

Schrittweite 0.125

i	x_i	y_i	$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0	1	-0.125	-0.13230339	-0.13275985	-0.13947121	0.867567053
1	0.125	0.86756705	-0.13943034	-0.14528403	-0.14564989	-0.15051512	0.722264834
2	0.25	0.72226483	-0.15047166	-0.15404665	-0.15427008	-0.15634306	0.568356804
3	0.375	0.5683568	-0.15629781	-0.15652827	-0.15654268	-0.15461339	0.412181287
4	0.5	0.41218129	-0.1545675	-0.15009691	-0.1498175	-0.14235259	0.262723136
5	0.625	0.26272314	-0.14230767	-0.13142395	-0.13074372	-0.11581507	0.132313456
6	0.75	0.13231346	-0.11577332	-0.09633109	-0.09511595	-0.07031517	0.037483025
7	0.875	0.03748303	-0.07027947	-0.03960692	-0.03768989	-2.5858E-05	-1.3482E-07
8	1	-1.3482E-07	-1.6853E-08	0.045212419	0.048038196	0.102261534	0.04812699
9	1.125	0.04812699	0.10227265	0.166105122	0.170094652	0.24542414	0.218143046
10	1.25	0.21814305	0.245414316	0.332875864	0.338342211	0.4403491	0.556176307
11	1.375	0.55617631	0.440310481	0.557527393	0.56485345	0.700339853	1.120411644
12	1.5	**1.12041164**					



Runge-Kutta

n	Schrittweite h	Näherung	exakt	Fehler	Fehlerquotient
3	0.5	1.11918515	1.12042227	-0.0012371	
6	0.25	1.12028915	1.12042227	-0.0001331	9.3
12	0.125	1.12041164	1.12042227	-1.062E-05	12.5
24	0.0625	1.12042152	1.12042227	-7.466E-07	14.2
48	0.03125	1.12042222	1.12042227	-4.942E-08	15.1
96	0.015625	1.12042226	1.12042227	-3.178E-09	15.6
192	0.0078125	1.12042227	1.12042227	-2.015E-10	15.8

In der Tabelle ist zu erkennen, dass beim Verfahren von Runge der Quotient q aufeinander folgender Fehler ungefähr durch $16 = 2^4$ dividiert wird, wenn die Schrittweite halbiert wird. Das Verfahren von Runge-Kutta hat also die Ordnung 4. Es kann nämlich gezeigt werden, dass sich das Verfahren lokal von der Taylorentwicklung der Lösung durch Terme unterscheidet, die proportional zu h^5 sind. Damit ist der globale Abbruchfehler höchstens eine Konstante mal h^4

Fazit:
Halbiert man die Schrittweite, so wird der Fehler

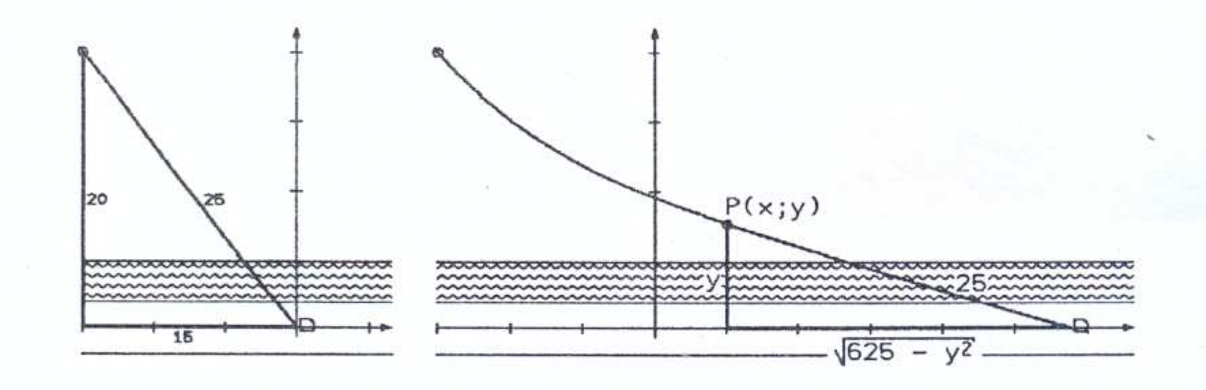
- beim Eulerverfahren ungefähr halbiert	Eulerverfahren:	Ordnung 1
- beim Verfahren von Heun ungefähr durch 4 geteilt	Heun:	Ordnung 2
- beim Verfahren von Runge-Kutta ungefähr durch 16 geteilt	Runge-Kutta:	Ordnung 4

Übungsaufgabe:
Anfangswertproblem: $y' = y + e^x$ Anfangswert: y(0) = 1 Intervall [0, 0.2]
Schrittweite: h = 0.025 Gesucht y(0.2)
Vergleich mit der exakten Lösung: $y = (x+1) \cdot e^x$ und mit der Eulermethode.

x	y(Euler)	y(Runge-Kutta)	y_{exakt} = e – 2
0.00	1.000 000	1.000 000	1.000 000
0.05	1.100 000	1.103 835	1.103 835
0.10	1.207 564	1.215 688	1.215 688
0.15	1.323 200	1.336 109	1.336 109
0.20	1.447452	1.465 683	1.465 683

Das Beispiel zeigt die Übereinstimmung der Näherungslösung nach Runge-Kutta mit der exakten Lösung.

Aufgabe:
Zwischen einem Feld und einer geradlinigen Strasse von 4 m Breite liegt ein Graben von 3 m Breite. Ein grosser Stein, der sich in 18 m Entfernung vom Strassenrand befindet, soll von einem Trax in den Graben gezogen werden. Dazu wird am Trax, der in der Strassenmitte rollt ein Seil 25 m Länge befestigt.



a) Auf welcher Kurve bewegt sich der Steinblock?
b) In welcher Entfernung von Grabenrand befindet sich der Stein, wenn der Trax 20 m gerollt ist?
c) Welche Distanz muss der Trax zurücklegen, bis der Fels in den Graben fällt?

Lösung:
a)
Zu Beginn befindet sich der Trax im Ursprung des Koordinatensystems. Der Stein befindet sich zu diesem Zeitpunkt im (-15, 20). Zu einem späteren Zeitpunkt befindet sich der Stein im Punkt (x, y). Da das Kabel die Richtung der Kurventangente hat gilt die Differentialgleichung $y' = \frac{-y}{\sqrt{625 - y^2}}$. Gesucht ist die Lösung, welche die Anfangsbedingung y(-15) = 20 erfüllt

Näherungsweise Bestimmung der Kurve der Kurve, die der Steinblock zurücklegt.

Runge-Kutta

Beispiel Trax und Stein

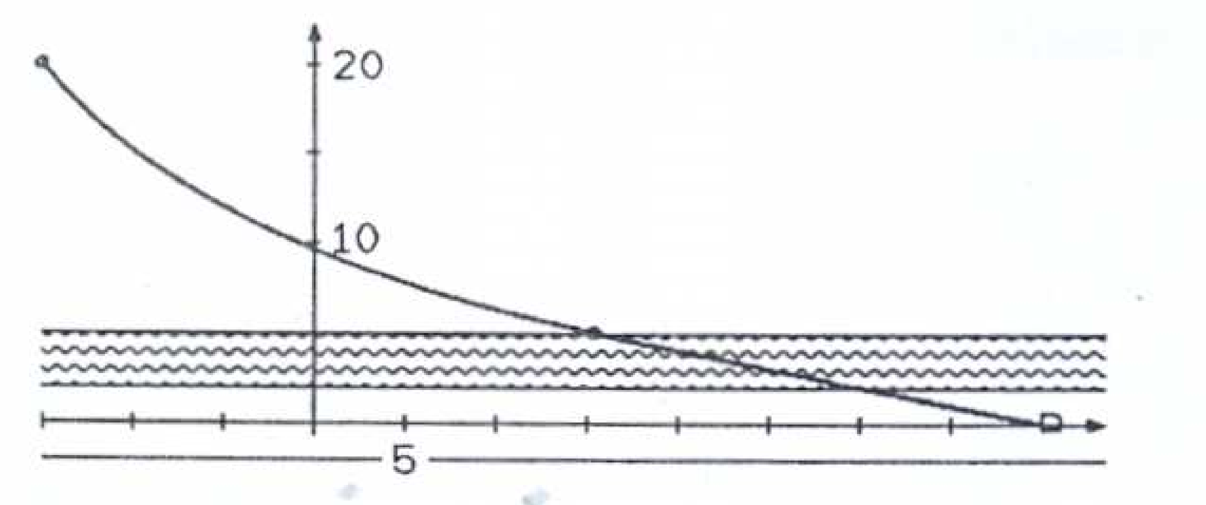
a	b
-15	15

Schrittweite 0.25

i	x_i	y_i	Abstand	$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	-15	20	40.31128874	-0.333333333	-0.32578417	-0.32595155	-0.31886546	19.67405496
1	-14.75	19.674055	39.93283034	-0.318865741	-0.31220908	-0.31234543	-0.30605949	19.36171592
2	-14.5	19.3617159	39.56167392	-0.306059742	-0.30012026	-0.30023356	-0.29459685	19.06148855

…… ……….

Skizze:



b)

Gesucht ist der Kurvenpunkt mit den Koordinaten (x, y), der vom Punkt (20,0) den Abstand 25 hat, für den also gilt:

$\sqrt{\left((x-20)^2 + y^2\right)} = 25$. Dazu wurde in der Tabelle die Spalte „Abstand“ eingefügt.

	x_i	y_i	Abstand	$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
48	-3	10.8860219	25.44612885	-0.120926598	-0.12009941	-0.12010505	-0.11928658	10.76591824
49	-2.75	10.7659182	25.16878018	-0.119286602	-0.11847683	-0.11848231	-0.11768095	10.64743727
50	-2.5	10.6474373	24.89212567	-0.117680963	-0.11688798	-0.11689331	-0.11610844	10.53054527

10.7659182	25.1687802
10.6936448	25
10.6474373	24.8921257

Lineare Interpolation ergibt den Wert 25 für y = 10.69, was einem Abstand von 5.69 ≈5.7 m vom Grabenrand bedeutet.

c)
Gesucht ist der Kurvenpunkt (x, y) für den die y-Koordinate kleiner oder gleich 5 ist.

	$\boxed{x_i}$	$\boxed{y_i}$	Abstand	$\boxed{k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)}$	k_2	k_3	k_4	$\boxed{y_{i+1}}$
……								
120	15	5.10049060	7.142478868	-0.052100752	-0.05182319	-0.05182466	-0.05154874	5.048666403
121	15.25	5.04866640	6.931921267	-0.051548747	-0.05127448	-0.05127594	-0.05100329	4.997390922
122	**15.5**	**4.99739092**	**6.724872938**	-0.051003299	-0.05073228	-0.05073372	-0.0504643	4.946657654
123	15.75	4.94665765	6.521650247	-0.050464305	-0.05019649	-0.05019791	-0.04993166	4.896460192

dies ist der Fall für x ≈ 15.5. Zu diesem Wert ist noch gemäss der Skizze in der Aufgabenstellung der Wert zu addieren $\sqrt{625 - y^2} \approx \sqrt{600} \approx 24.5$. Der Trax ist also ungefähr 40 m vom Startpunkt entfernt.