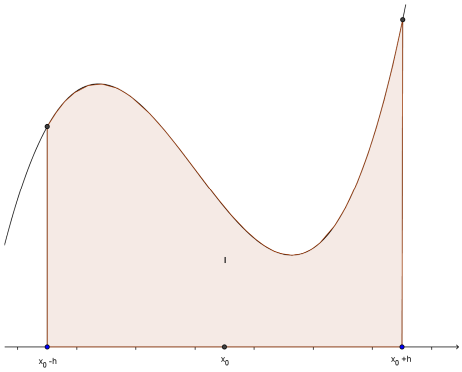
Numerische Integration

1. Einleitung

Die Auswertung von bestimmten Integralen nach dem Hauptsatz ist in der Praxis eher selten. Zudem kann bewiesen werden, dass schon einfache Integranden wie etwa $f(x) = e^{-x^2}$ keine elementare Stammfunktion haben. Man ist deshalb auf einfache und effiziente Verfahren angewiesen, die eine näherungsweise Berechnung von bestimmten Integralen ermöglichen.

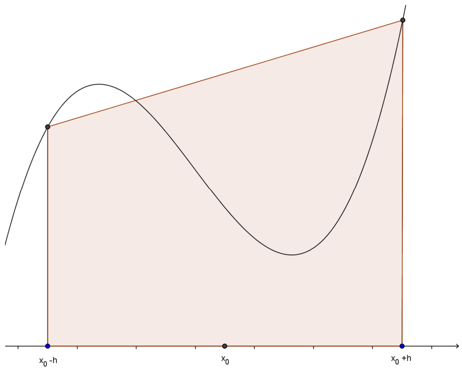


Gesucht ist also ein Näherungswert für $I = \int_{x_0-h}^{x_0+h} f(x)dx$

Dabei sei f im Integrationsintervall stetig und es gelte dort $f(x) \geq 0$. In diesem Fall kann I als Inhalt der farbigen Fläche interpretiert werden.

Eine Lösungsidee besteht darin, die Funktion f durch einfache, geschickt gewählte Funktionen (z.B. Polynome, trigonometrische Funktionen) zu ersetzen.

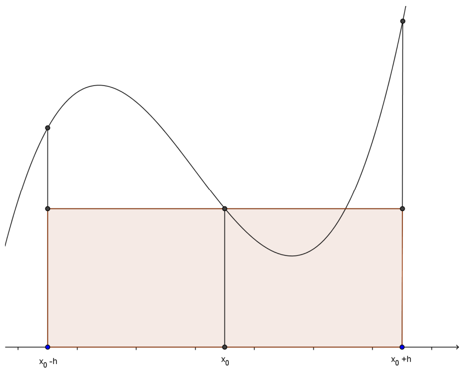
2. Trapezregel



Ersetze den Graph von f durch ein Trapez mit der Höhe 2h und der Mittellinie
$\frac{f(x_0 - h) + f(x_0 + h)}{2}$
Für die Trapezfläche T gilt dann:

$$T = h\big(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)\big) \qquad (1)$$

3. Mittelpunktsregel

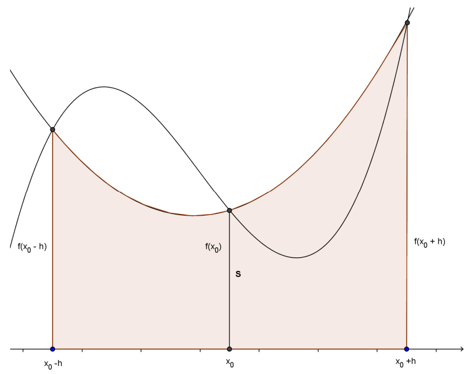


Ersetze den Graphen von f durch die Tangente im Mittelpunkt an der Stelle x_0. Man erhält das gleiche Resultat, wenn man die Tangente durch eine beliebige Gerade durch den Punkt $P(x_0, f(x_0))$ ersetzt, z.B. durch eine Parallele zur x-Achse.

Nach der Mittelpunktsregel gilt damit:

$$M = 2h \cdot f(x_0) \qquad (2)$$

4. Simpsonregel nach Thomas Simpson (1710 - 1761)

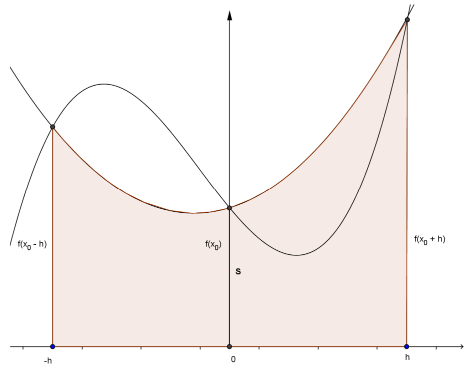


Ersetze den Graph von f durch die quadratische (im Spezialfall lineare) Funktion, bestimmt durch die Funktionswerte von f an den Stellen x_0 - h, x_0 und x_0 + h

$$S = \int_{x_0-h}^{x_0+h} \left(a \cdot x^2 + b \cdot x + c\right)\, dx$$

Die Berechnung dieses Integrals kann vereinfacht werden , indem man das Koordinatensystem in die Intervallmitte x_0 verschiebt:

$$S = \int_{-h}^{h} \left(a' \cdot x^2 + b' \cdot x + c'\right) dx$$



wo der Graph des Integranden durch die Punkte (-h, f(x_0 – h), (0, f(x_0) und (h, f(x_0 + h) geht.
Aus Symmetriegründen liefert der mittlere Integrand keinen Beitrag (der Graph ist punktsymmetrisch zum Nullpunkt) und wegen der Axialsymmetrie der beiden restlichen Terme vereinfacht sich das Integral zu

$$S = 2 \cdot \int_{0}^{h} \left(a' \cdot x^2 + c'\right) dx = 2\left(a' \cdot \frac{x^3}{3} + c' \cdot x\right)\Bigg|_0^h = \frac{h}{3} \cdot \left(2a' \cdot h^2 + 6c'\right)$$

Der Klammerterm kann nun direkt aus den Funktionswerten an den drei Stützstellen berechnet werden (ohne dass die Koeffizienten a′ und c′ bestimmt werden müssen):

$$g(-h) = a' \cdot h^2 - b' \cdot h + c' = f\left(x_0 - h\right)$$
$$g(0) \;=\; c' = f\left(x_0\right)$$
$$g(h) \;= a' h^2 + \; b' \cdot h + c' = f\left(x_0 + h\right)$$

Multipliziert man nämlich die mittlere Gleichung mit 4 und addiert die drei Gleichungen so erhält man:

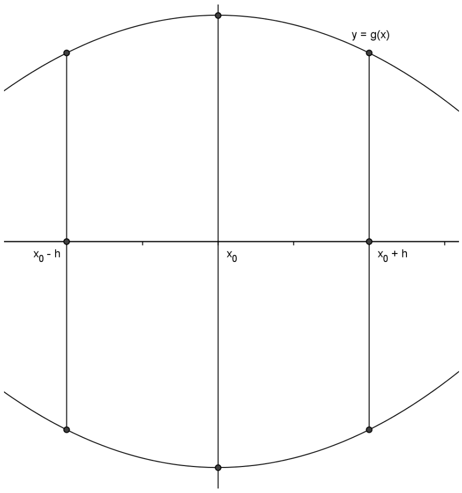
$$S = \frac{2h}{6} \cdot \left(f\left(x_0 - h\right) + 4 \cdot f\left(x_0\right) + f\left(x_0 + h\right)\right) \qquad (3)$$

Der gesuchte Flächeninhalt I kann damit näherungsweise aus 3 Stützwerten und der Intervallbreite 2h berechnet werden. Es kann gezeigt werden, dass sich für Polynome 3. Grades sogar der genaue Wert ergibt.
Vergleicht man schliesslich (3) mit (1) und (2), so erhält man eine Darstellung von S als gewichtetes Mittel von T und M:

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{T} + 2\mathrm{M}}{3} \qquad (4)$$

Zusammenhang mit der Keplerschen Fassregel (nach Johannes Kepler 1571 - 1630)

Wendet man die Simpsonregel auf die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \pi \cdot g^2(x)$
an, so erhält man eine Näherungsformel zur Berechnung von Rotationskörpern, die sogenannte Keplersche Fassregel:



$$V = \int_{-r}^{r} \left(\pi \cdot g^2(x)\right) dx \approx \frac{2h}{6} \cdot \left(\pi \cdot g^2(x_0 - h) + 4\pi \cdot g^2(x_0) + \pi \cdot g^2(x_0 + h)\right)$$

Keplersche Fassregel (1615):
Das Volumen eines Rotationskörpers kann näherungsweise aus der Intervallbreite 2h und den Inhalten der Querschnitte an den Intervallgrenzen und der Intervallmitte berechnet werden.

Für den Zylinder, den Kegel und die Kugel ergibt sich sogar der genaue Wert.

Beispiel Kugelvolumen:

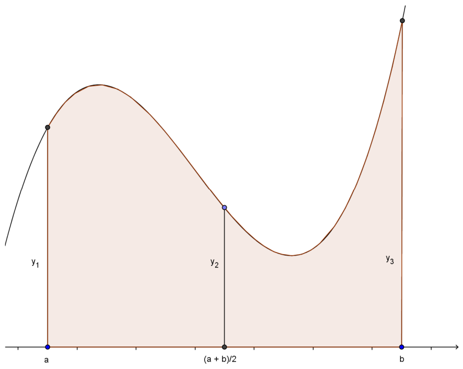
$$V = \frac{2r}{6} \cdot \left(0 + 4\pi r^2 + 0\right) = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

Uebungsaufgabe:
Der Graph der Funktion f mit der Gleichung f(x) = 2 + sin x erzeugt bei Rotation um die x-Achse im Intervall [0, 2π] einen vasenförmigen Körper. Bestimmen Sie sein Volumen
a) genau
b) durch Anwenden der Keplerregel auf zwei Teilintervalle

Lösung:
a) $V = 9\pi^2$
b) $V \approx \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot \left(\left(4\pi + 9\pi + 4\pi\right) + \left(4\pi + \pi + 4\pi\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot 26\pi^2$

Zusammenfassung

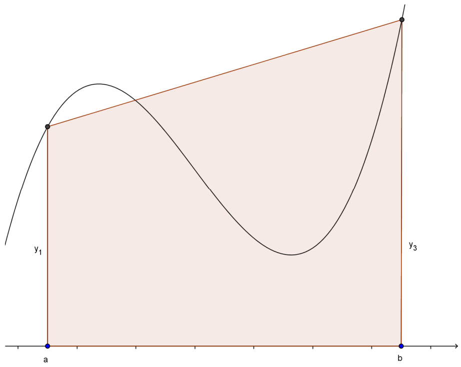
Wir fassen die bisherigen Ergebnisse zusammen und wählen neue Bezeichnungen. Das Integral



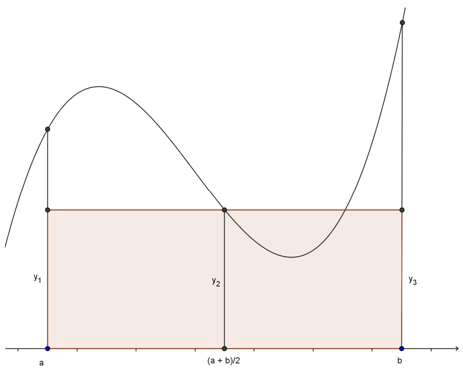
$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

kann nach den folgenden Regeln näherungsweise berechnet werden:
Dabei bezeichnet *l* = b - a die Länge des Integrationsintervalls

1. Trapezregel (5) $T_0 = \frac{l_0}{2} \cdot (y_1 + y_3)$



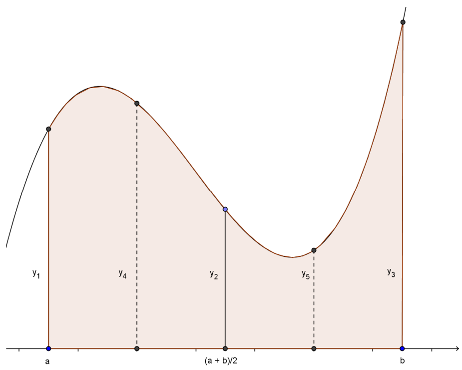
2. Mittelpunktsregel (6) $M_0 = l_0 \cdot y_2$



3. Simpson (7) $S_0 = \frac{T_0 + 2M_0}{3}$

Die Näherungen können verbessert werden, indem das Intervall schrittweise halbiert wird und auf die Teilintervalle die drei Regeln angewendet werden. Mit der neuen Intervallbreite

$l_1 = \frac{l_0}{2}$ ergeben sich dann die folgenden Werte:



$$M_1 = \frac{l_0}{2} \cdot y_4 + \frac{l_0}{2} \cdot y_5 = l_1 \cdot \left(y_4 + y_5 \right) \qquad (8)$$

$$T_1 = \frac{l_0}{2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{l_0}{2} \cdot \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{l_0}{2} \cdot \frac{y_1 + y_3}{2} + \frac{l_0}{2} \cdot y_2 = \frac{T_0 + M_0}{2} \qquad (9)$$

und daraus

$$S_1 = \frac{T_1 + 2M_1}{3}$$

Der Klammerterm von M_1 ist die Summe der neuen Stützwerte y_4 und y_5, l_1 ist die neue Intervallbreite.

Zur Bestimmung der Trapezwerte berechnet man zunächst T_0 sowie die
Werte M_0, M_1, M_2, … Die weiteren Werte der Trapezregel ergeben sich dann zu

$T_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(T_n + M_n \right)$,

wobei in der Mittelpunktsregel die Funktionswerte von f in den Mittelpunkten der zum Trapezwert T_n gehörigen Intervalle auftreten.

Illustration der Regeln am folgenden Beispiel

$$\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = 4\arctan(1) = \pi$$

Tabelle der M-Werte

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	Schrittweite	M-Regel	T-Regel
1	0	4		**M_0**	**T_0** $=1\cdot(y_1+ y_3)/2$
2	**0.5**	3.2	1	**3.2**	**3**
3	1	2			
4	**0.25**	3.76470588		**M_1**	**T_1** $=(M_0 + T_0)/2$
5	**0.75**	2.56	0.5	**3.162352941**	**3.100000000**
6	**0.125**	3.93846154			
7	0.375	3.50684932			
8	0.625	2.87640449		**M_2**	**T_2** $=(M_1 + T_1)/2$
9	**0.875**	2.26548673	0.25	**3.146800518**	**3.131176471**
10	**0.0625**	3.9844358			
11	0.1875	3.86415094			
12	0.3125	3.64412811			
13	0.4375	3.35737705			
14	0.5625	3.03857567			
15	0.6875	2.71618037			
16	0.8125	2.40941176		**M_3**	**T_3** $=(M_2 + T_2)/2$
17	**0.9375**	2.12889813	0.125	**3.14289473**	**3.138988494**

In der folgende Tabelle sind die Resultate zusammengefasst. Zusätzlich sind die Abweichungen der Näherungen vom exakten Wert π angegeben:

	Trapezregel	Mittelp.regel	Simpson	Abweichung von π		
n	T	M	S	bei T	bei M	bei S
0	3.00000000	3.20000000	3.13333333	-0.14159265	0.05840735	-0.00825932
1	3.10000000	3.16235294	3.14156863	-0.04159265	0.02076029	-0.00002403
2	3.13117647	3.14680052	3.14159250	-0.01041618	0.00520786	-0.00000015
3	3.13898849	3.14289473	3.14159265	-0.00260416	0.00130208	0.00000000
4	3.14094161	3.14191817	3.14159265	-0.00065104	0.00032552	0.00000000
5	3.14142989	3.14167403	3.14159265	-0.00016276	0.00008138	0.00000000
6	3.14155196	3.14161300	3.14159265	-0.00004069	0.00002035	0.00000000
7	3.14158248	3.14159774	3.14159265	-0.00001017	0.00000509	0.00000000
8	3.14159011	3.14159393	3.14159265	-0.00000254	0.00000127	0.00000000
9	3.14159202	3.14159297	3.14159265	-0.00000064	0.00000032	0.00000000

6. Rombergintegration

In der Tabelle ist zu erkennen, dass bei einer Halbierung des Intervalls der Fehler der Trapezwerte T (bzw. der Mittelpunktswerte M) ungefähr durch 4 geteilt wird. Wir vermuten, dass gilt:

$$I \approx T(h) + c \cdot h^2$$
$$I \approx T\left(\frac{h}{2}\right) + c \cdot \frac{h^2}{4}$$

Die Idee von Romberg besteht darin, durch eine geschickte Linearkombination die Konvergenz zu beschleunigen. Multipliziert man die 1. Gleichung mit (-1) und addiert das 4-fache der 2. Gleichung so erhält man

$3I \approx 4 \cdot T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)$ und schliesslich

$$I \approx \frac{4 \cdot T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)}{3}$$

Diese Überlegungen führen auf den sogenannten Rombergalgorithmus. In der 1. Spalte stehen mit neuer Bezeichnung die Trapezwerte. Die Glieder der 2. Spalte berechnen sich aus denjenigen der ersten, die Glieder der dritten Spalte aus denjenigen der zweiten, usf. ... Dabei stehen in der 2. Spalte die Werte der Simpsonregel.

$$\begin{array}{llll}
T_{0,0} = T_0 & & & \\
T_{1,0} = T_1 & T_{1,1} = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot T_{1,0} - T_{0,0}\right) & & \\
T_{2,0} = T_2 & T_{2,1} = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot T_{2,0} - T_{1,0}\right) & T_{2,2} = \frac{1}{15} \cdot \left(16 \cdot T_{2,1} - T_{1,1}\right) & \\
T_{3,0} = T_3 & T_{3,1} = \frac{1}{3} \cdot \left(4 \cdot T_{3,0} - T_{2,0}\right) & T_{3,2} = \frac{1}{15} \cdot \left(16 \cdot T_{3,1} - T_{2,1}\right) & T_{3,3} = \frac{1}{63} \cdot \left(64 \cdot T_{3,2} - T_{2,2}\right)
\end{array}$$

allg:

$$T_{n,k} = \frac{4^k \cdot T_{n,k-1} - T_{n-1,k-1}}{4^k - 1} \qquad k \leq n$$

Es kann bewiesen werden, dass für differenzierbare Integranden die in den Spalten stehenden Zahlenfolgen gegen den Wert des Integrals konvergieren. Die Konvergenz erfolgt umso rascher, je weiter rechts sich ihre Spalte befindet.

Romberg

n						
0	**3.00000000**					
1	3.10000000	**3.13333333**				
2	3.13117647	3.14156863	**3.14211765**			
3	3.13898849	3.14159250	3.14159409	**3.14158578**		
4	3.14094161	3.14159265	3.14159266	3.14159264	**3.14159267**	
5	3.14142989	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.14159265	**3.14159265**

(pi_romberg.xls)

Uebungsaufgaben:

a) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ (der Integrand ist an der Stelle 0 durch seinen Grenzwert 1 definiert.

Lösung:

Rombergschema

0.9207354924			
0.9397932848	0.9461458823		
0.9445135217	0.9460869339	0.9460830041	
0.9456908636	0.9460833109	0.9460830694	**0.9460830704**

b) Kurvenlänge L eines Graphen

$L = \int_{x_0}^{x_n} \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ dx$ z.B.

Für den Umfang U einer Ellipse mit grosser Halbachse a und der Exzentrizität ε = 0.8 gilt:

$U = 4a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 z}\ dz$

Lösung: 5.10540·a

c) Schwingungsdauer T eines Fadenpendels der Länge *l* bei der Amplitude α

d) Wert Φ(1) für die Standardnormalverteilung.

e) $\pi(n) = \int_2^n \frac{dx}{\ln x}$ ist die Anzahl der Primzahlen ≤ n. Es ist $\pi\left(10^9\right) = 50\,849\,235$